Mat

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
14
4 M
1

14-21. H 28

CVRVI AC RECTI PROPORTIO

A

BARTHOLOMÆO SOVERO
FRIBVRGENSI
In Gymnaſio Patauino Matheſeos Profeſſore

promota

LIBRIS SEX.

AD

Illuſtriſs. & Excellentiſs. Viros

NICOLAVM CONTARENVM,
IOHANNEM BAPTISTAM NANI,
DOMINICVM MOLINVM
EIVSDEM
GYMNASII PATAVINI MODERATORES.

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

PATAVII,
Ex Typographia Variſci Variſci. MDCXXX.

Superiorum permiſſu.

A D

Illuſtriſs. & Excellentiſs. Viros

NICOLAVM CONTARENVM, IOHANNEM BAPTISTAM NANI, DOMINICVM MOLINVM

GYMNASII PATAVINI MODERATORES.

GVLIELMVS SOHIERVS GALLOBELGA.

STatuerat author, quem præripuit Fatum, hunc vobis librum commendare, hoc eſt, ſplendoris Veſtri acceſſione, ſummoperè ornare. Iam incumbit mihi hoc onus. Non enim præcipuum amici munus, proſequi defunctum ignauo queſtu, ſed quæ voluerit, meminiſse, quæ mandauerit, exequi. Vos igitur ſubmiſsè rogo, hunc poſthumum veſtri alumni fœtum, &ſi per ignotum ad vos accedat, benignè ſuſcipere, atque veſtra tutela dignari. Hoc decet ſummam veſtram humanitatem; cuius ego laudes præterire, quàm ingenij culpa deterere, malo. Valete:

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

EPIG. AD LECTOREM
CVM CATASTR.
Ad defuncti AVTORIS manes.

Condit ubi vultus Vaſti luſtrator, & ævi
Præſul, victorem nox fugat atra ſuum:
Protenus adparent tenebrarum ſidera alumnj,
Et rutila aurati fornicis antra replent.
Non aliter SOVERVS ubi ſua ſubtrahit ora,
Fuſca polum velant texta Mathematicum;
Qvêis comites, lector genij nova lumina, mundo
Decreta ante obitum, poſthuma ſcripta, vides.
Rara tamen: nec cuncta ſimùl, conſcendere noſtras
Ne reliquis deſint, ſidera juſſa, plagas.
Cætera tempus habet, ſperatis condita luſtris
Omnia in apricum ſtante trahenda die.
Nunc fruere è multis multo, ſed pondere, mole
Charta tumens famæ præmia nulla capit.

Sed Tu, qvi dextram trutinâ ſuffultus, in omne
Qvantum agis ingenij viribus imperium
Dic mihi, ſi poſt Iuſta licet, SOVERE, vicêſne
Æquis uſque animis intueare novas,
Mortua Te vivo dum cernunt viva ſepultum
Et ſibi detractum dant Tibi prompta diem?

Sag-

Suggeris, an fallor, compoſita vita, modeſti
Mores, ac liqvido cor adamante madens
Noluit eludi vanâ prurigine mentem,
Sic docuj; aſt juvit ſic didiciſſe ſimul:
Quod ſit ea annorum via, & hæc antiqua ſepulchri
Lex; Variare novâ tempore freta vice.

F.
Ioh. Iac. Hartig. Luſ.



Sic

S Ic maris ac terræ vaſtas emenſus abyſſos
Ad Superos durâ lege SOVERVS abit?
Sic liquit terras humanis grandior auſis,
Mortales viſus jam ſuperaſſe vias?
Fallor, an exactè Curvis quod Recta quadraſſet,
Naturam voluit Parca leuare metu.
Invida quid lucem, famam quid Fata negatis?
Poſthuma SOHIERO vindice fama venit.
Hadriaci faveant modò Numina magna Lycei,
Viuet Opus, genio vivet Vterquè ſuo.

Vivo quod debebat
poſt fata deſideratiſs.
L. S.
Ioan. Rhodius, Danus.

CVR-



BARTHOLOMEVS SOVER
FRIBVRGENSIS IN GYMNASIO PATAVINO
MATHESEOS PVBLICVS PROFESSOR.

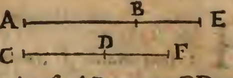
CVRVI AC RECTI Proportio promota.

LIBER PRIMVS.

THEOREMA I. PROPOS. I.

SI duabus quantitatibus inæqualibus æquales quantitates addantur, aut minor maiori; maior erit ratio maioris ad minorem, quam maioris cum addito, ad minorem cum addito.

SINT duæ quantitates inæquales AB. maior, CD. minor, quibus addantur quantitates æquales BE. DF. Dico maiorem eſſe rationem AB. ad CD. quam AE. ad CF. Cum enim maior ſit AB. quam CD. maior erit ratio AB. ad BE. quam CD. ad DF. & componendo ac permutando, maior erit ratio totius AE. ad totam CF. quam partis BE. ad partem DF. Quare & reliqui AB. ad reliquum CD. maior erit ratio quam totius AE. ad totam CF. Quod demoſtrare oportuit.



8. 5.

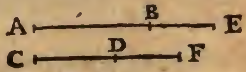
33. 5.

Eandem demonſtrationem fieri certum eſt, ſi BE. ſtatuatur minor quam DF.

THEOREMA II. PROPOS. II.

SI ex duabus quantitatibus inæqualibus æquales quantitates demantur, aut minor ex maiori; minor erit ratio maioris ad minorem, quam reſidui primæ quantitatis ad reſiduum ſecundæ.

Statuatur AE. prima quantitas maior, & CF. ſecunda minor, & ex AE. auferatur BE. æqualis ablatę DF. ex CF. Dico minorem eſſe rationem AE. ad CF,



quam AB. ad CD. Cum enim maior ſit AE. quam CF. ma-
8. 5. ior erit ratio AE. ad BE. quam CF. ad DF. & permutando maior ratio totius AE. ad totum CF. quam partis BE. ad
33.5. partim D.F. Quare reliqui AB. ad reliquum CD. maior erit ratio quam totius AE. ad totum CF. ideoque minor ratio maioris AE. ad minorem CF. quam reſidui AB. ad reſiduum CD. Quod erat demonſtrandum.

Idem ſequetur ſi BE. ſit minor quam DF.

COROLLARIVM.

HInc ſequitur, ſi ſint quatuor magnitudines, quarum prima maior ſit quam ſecunda & tertia, & ſecunda maior quam quarta, ſuperetque prima ſecundam eodem aut minori exceſſu, quo tertia quartam; prima ad ſecundam minor erit ratio, quam tertiæ ad quartam. Si enim prima quantitas ſtatuatur AE. ſecunda AB. tertia CF. quarta CD. ſitque differentia primæ, & ſecundæ BE. æqualis differentiæ tertiæ, & quartæ DF. aut etiam minor, erit ex demonſtratis minor ratio AE. ad CF. quam AB. ad CD. & permutando minor ratio AE. primæ, ad AB. ſecundam, quam CF. tertiæ, ad CD. quartam.

THEO-

THEOREMA III. PROPOS. III.

SI prima quantitas ad ſecundam maiorem rationem habuerit, quam tertia ad quartam, ac inter primam & ſecundam, itemque inter tertiam & quartam mediæ proportionales ſint quinta, & ſexta; erit primæ ad quintam maior ratio, quam tertiæ ad ſextam.

SIT primæ quantitatis A. ad ſecundam B. maior ratio quam tertiæ C. ad quartam D. & inter A. B. ſtatuatur media proportionalis E. & inter C. D. media item proportionalis F. Dico maiorem eſſe rationem A. ad E. quam. C. ad F. Si enim non eſt maior, ſit vel æqualis, vel minor; Ac ſit primum æqualis, ita vt ſit A. ad E. ſicut C. ad F. eſt autem vt A. ad E. ita E. ad B. ergo vt E. ad B. ita C. ad F. ſed vt C. ad F. ita ponitur F. ad D. vt igitur E. ad B. ita F. ad D. cum igitur ponatur A. ad E. ſicut C. ad F. atque hinc ſequatur eſſe E. ad B. vt F. ad D. erit ex æqualitate vt A. ad B. ita C. ad D. Quod eſt abſurdum, ponitur enim ratio A. ad B. maior quam C. ad D. Sed dicatur ratio A. ad E. minor quam ratio C. ad F. Quoniam minor eſt ratio A. ad E. quam C. ad F. & vt A. ad E. mediam proportionalem, ita E. ad B. erit minor ratio E. ad B. quam C. ad F. Sed vt C. ad F. mediam proportionalem, ita F. ad D. igitur minor erit ratio E. ad B. quam F. ad D. Cum igitur minor ponatur ratio A. ad E. quam C. ad F. & ſequatur minor proportio E. ad B. quam F. ad D. erit ex æqualitate minor ratio A. ad B. quam C. ad D. Quod eſt abſurdum, poſita enim eſt maior. Igitur cum



31.5. 31.5.

ratio dicta neque ſit æqualis, neque minor, erit maior. Quod demoſtrare oportebat.

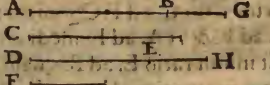
COROLLARIVM.

Eodem prorſus modo demonſtrabitur, ſi prima ad ſecundam minorem rationem habuerit quam tertia ad quartam ac inter primam ac ſecundam ſumatur media proportionalis quinta, & inter tertiam, & quartam ſexta, erit primæ ad quintam minor ratio, quam tertiæ ad ſextam. Si enim ſtatuantur C. prima D. ſecunda A. tertia B. quarta F. quinta E. ſexta eodem prorſus modo ſequetur maiorem eſſe rationem A. ad E. quam C. ad F. ideoque minorem C. ad F. quam A. ad E.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI prima quantitas ad ſecundam habuerit minorem rationem, quam tertia ad quartam, fueritque prima maior quam tertia, & primæ ac tertiæ eadem quantitas addatur, vel primæ minor quam tertiæ; minor erit ratio primæ cum addita ad ſecundam, quam tertiæ cum addita ad quartam.

HABEAT prima quantitas AB. ad ſecundam C. minorem rationem quam tertia DE. ad quartam F. ſitq; AB. maior quam DE. & ad primam AB. ac tertiam DE. addantur



æquales BG. EH. Dico minorem eſſe rationem AG. ad C. quam DH. ad F. Cum enim maior ſit AB. quam
8. 5. DE. maior erit ratio AB. ad BG. quam DE. ad EH. &
28. 5. componendo, maior erit ratio AG. ad BG. quam DH. ad EH.

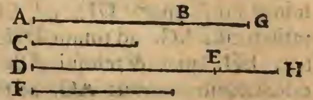
EH. & per conuerſionem rationis , minor ratio AG. ad 30.5.
AB. quam DH. ad DE. ſed minor etiam ponitur ratio
AB. ad C. quam DE. ad F. ergo ex æqualitate minor eſt 31.5.
ratio AG. ad C. quam DH. ad F. Quod erat probandum

Eodem modo probatur, ſi primum additum BG. ponatur minus quam ſecundum EH. multo minorem eſſe rationem AG. ad. C. quam DH. ad F.

THEOREMA V. PROPOS. V.

SI habuerit prima quantitas ad ſecundam maiorem rationem quam tertia ad quartam, ſitque prima minor tertia, ac primæ, & tertiæ eadem quantitas addatur, vel primæ maior quam tertiæ erit ratio primæ cum addita ad ſecundam maior, quam tertiæ cum addita ad quartam.

SIT primæ quantitatis AB. ad ſecundam. C. maior ratio quam tertiæ DE. ad quartam F. ſitque AB. minor quam DE. & primæ ac tertiæ addantur æquales BG. EH. Dico maiorem eſſe rationem AG. ad. C. quã DH. ad F. cum. n. AB. ſit



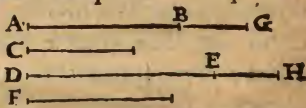
minor quam DE. minor 8.5.
erit ratio AB. ad BG. quam DE. ad EH. & componendo, 28.5. 35.5.
& per conuerſionem rationis, maior erit ratio AG. ad AB.
quam DH. ad DE. ſed etiam ponitur maior ratio AB. ad
C. quam DE. ad F. igitur ex æqualitate maior eſt ratio AG. 31.5.
ad C. quam DH. ad F. Quod erat demonſtrandum.

Idem aperte ſequitur ſi primum additum BG. ſit maius quam ſecundum. EH.

THEOREMA VI. PREPOS. VI.

SI habuerit prima quantitas ad ſecundam minorem rationem quam tertia ad quartam, ſitque prima minor tertia, ac ex prima, & tertia eadem quantitas dematur, aut ex prima maior quam ex tertia; minor erit ratio reſidui primæ quantitatis ad ſecundam, quam reſidui tertiæ ad quartam.

HABEAT prima quantitas AG. ad ſecundam. C. minorem rationem quam tertia DH. ad quartam F. ſitque AG. minor quam DH. & ex prima ac tertia demantur æquales BG. EH. Dico minorem eſſe rationem reſidui AB. ad ſecundam. C.



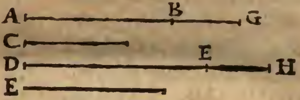
quam reſidui DE. ad quartam F. Quoniam minor eſt
8.5. AG. quam DH. & æquales BG. EH. erit AG. ad BG.
27.5. minor ratio quam DH. ad EH. & permutando minor ratio totius AG. ad totam DH. quam partis BG. ad partem
33.5. EH. quare & reliqui AB. ad reliquum DE. minor
27.5. erit ratio quam totius AG. ad totum DH. & permutando minor erit ratio AB. ad AG. quam DE. ad DH. ſed etiam minor eſt poſita ratio AG. ad. C. quam DH. ad F.
31.5. igitur ex æqualitate, minor erit ratio primi reſidui AB. ad ſecundam quantitatem. C. quam ſecundi reſidui. DE. ad quartam. F. Quod demonſtrare oportebat.

Eadem demonſtrationis ratione ſequitur, minorem eſſe rationem AB. ad C. quam DE. ad F. ſi detracta pars BG. ponatur maior, quam detracta EH.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI habuerit prima quantitas ad ſecundam maiorem rationem quam tertia ad quartam, ſitque prima maior tertia, atque ex prima, & tertia æqualis quantitas dematur, aut ex prima minor, quam ex tertia; maior erit ratio reſidui primæ quantitatis ad ſecundam, quam reſidui tertiæ ad quartam.

PRIMA quantitas AG. ad ſecundam. C. maiorem habeat rationem quam tertia DH. ad quartam F. ſitque AG. maior quam DH. & ex prima, & tertia auferantur æquales BG. EH. Dico maiorem eſſe rationem reſidui AB. ad ſecundam. C. quam reſidui DE. ad quartam F. Quoniam maior eſt AG. quam DH. & æquales ſunt BG. EH. habebit AG. ad BG. maiorem rationem quam DH. ad EH. 8.5.



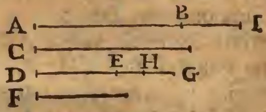
& permutando, maior erit ratio totius AG. ad totum DH. 27.5.
quam partis BG. ad partem EH. quare, & reliqui AB. ad 33.5.
reliquum DE. maior eſt ratio quam totius AG. ad totum 33.5.
DH. & permutando maior eſt ratio AB. ad AG. quam DE. ad DH. ſed etiam maior eſt poſita ratio AG. ad. C. quam DH. ad F. igitur ex æqualitate maior erit ratio primi reſidui 31.5.
AB. ad ſecundam quantitatem. C. quam ſecundi reſidui DE. ad quartam F. Quod oſtendere oportebat.

Eodem modo maior fiet ratio reſidui AB. ad reſiduum. C. quam reſidui DE. ad reſiduum F. ſi BG. ſtatuatur minor quam EH.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

SI fuerit vt prima quantitas ad ſecundam ita tertia ad quartam, ſitque prima maior tertia, ac primæ ac tertiæ eadem quantitas addatur, aut primæ minor quam tertiæ; minor erit ratio primæ cum addita ad ſecundam, quam tertiæ cum addita ad quartam.

HABEAT prima quantitas AB. ad ſecundam. C. eandem rationem quam tertia DE. ad quartam F. ſitque AB. maior quam DE. & primę ac tertiæ addantur æquales BI. EG. Dico minorem eſſe rationem AI. ad C. quam DG. ad F. fiat enim vt AB. ad DE. ita



14.5. BI. ad EH. cum AB. ſit maior quam DE. erit BI. id eſt EG. maior quam EH. Quare cum ſit vt AB. ad DE. ita BI. ad EH. erit permutando, componendo, & per conuerſionem rationis vt IA. ad AB. ita HD. ad DE. ſed vt AB. ad. C. ita eſt DE. ad F. ex hypotheſi eſt ergo, ex æqualitate vt
8.5. AI. ad C. ita DH. ad F. minor autem eſt ratio DH. ad F.
13.5. quam DG. ad F. minor igitur etiam eſt ratio AI. ad. C. quam DG. ad F. Quod erat oſtendendum.

Idem etiam aperte ſequitur ſi BI. ponatur minor quam EG. vt ex modo demonſtrandi conſtat.

COROLLARIVM.

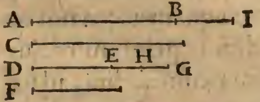
EOdem modo oſtenditur, ſi ſit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam, ſitque prima minor tertia, ac primæ & tertiæ eadem quantitas addatur, aut primæ maior;

ior;maior erit ratio primæ cum addita ad ſecundam, quam tertiæ cum addita ad quartam. Nam ſi DE. ſtatuatur prima, F. ſecunda, AB. tertia. C. quarta, & addantur BI. EG. aut æquales, aut EG. maior, ſequetur eodem modo minorem eſſe rationem AI. ad C. quam DG. ad F. ideoque maiorem eſſe rationem DG. ad F. quam AI. ad C.

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI fuerit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam, ſitque prima maior tertia, atque ex prima & tertia eadem quantitas dematur, aut ex prima minor, quam ex tertia; maior erit ratio primi reſidui ad ſecundam quantitatem, quam ſecundi ad quartam.

HABEAT prima quantitas AI. ad ſecundam C. eandem rationem, quam tertia DG. ad quartam F. ſitque AI. maior quam DG. & ex prima ac tertia demantur æquales BI. EH. Dico maiorem eſſe rationem primi reſidui AB. ad ſecundam quantitatem C. quam



ſecundi reſidui DE. ad quartam quantitatem. F. Fiat enim vt AI. ad DG. ita BI. ad HG. erit HG. minor quàm BI. id 14.5.
eſt quam EG. Quoniam igitur eſt, vt totum AI. ad totum DG. ita pars BI. ad partem HG. erit reliquum AB. ad re- 33.5.
liquum DH. vt totum AI. ad totum DG. & permutando, vt AB. ad AI. ita DH. ad DG. ſed vt AI. ad C. ita DG. ad F. ergo ex æqualitate, vt AB. ad C. ita DH. ad F. ſed DH. ad F. maiorem habet rationem quam DE. ad F. Igitur primum reſiduum AB. ad C. maiorem habet rationem, quam ſecundum DE. ad F. Quod &c. Idem prorſus concluditur ſi BI. ponatur minor quam EG.

CONSECTARIVM.

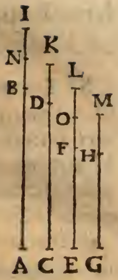
Eodem prorſus modo demonſtratur, ſi ſit prima quantitas ad ſecundam, vt tertia ad quartam; ſitque prima minor tertia, ac ex prima & tertia eadem quantitas auferatur, aut ex prima minor; minor erit ratio primi reſidui ad ſecundam quantitatem, quam ſecundi ad quartam. Nam ſi DG. ſtatuatur prima. F. ſecunda. AI. tertia, & C. quarta, & auferantur ex BI. EG. aut aequales, aut BI. minor; ſequetur eodem modo maiorem eſſe rationem AB. ad C. quam DE. ad F. idcoque minorem rationem DE. ad F. quam AB. ad C.

THEOREMA X. PROPOS. X.

SI ſit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam, quibus ſingulæ quantitates addantur, ita vt additæ ad primam & tertiam, item additæ ad ſecundam & quartam ſint æquales, ſitque prima quantitas maior quam ſecunda, & tertia, atque additum primum maius ſecundo; minor erit ratio primæ cum addita, ad ſecundam cum addita, quam tertiæ cum addita, ad quartam cum addita.

SIT vt prima quantitas AB. ad ſecundam CD. ita tertia EF. ad quartam GH. quibus ordine addantur IB. KD. LF. MH. ſintque IB. LF. item KD. MH. inter ſe æquales, AB. autem maior quam CD. aut EF. & BI. maius quam DK. Dico minorem eſſe rationem AI. ad CK. quam EL. ad GM. Fiat vt CD. ad AB. ita DK. ad BN. Item vt GH. ad EF. id eſt CD. ad AB. (minor ad maiorem) ita HM.
14.5. ad FO. erit BN. minor quam BI. & FO. minor quam FL. Igitur
11.5. erit vt DK. ad BN. ita HM. id eſt DK. ad FO. æquales ergo ſunt
9.5. FO. BN. quæ ſi demantur ex æqualibus FL. BI. remanent æqua-

æquales OL. NI. Cum igitur ſit vt AB. ad CD. ita BN. ad DK. erit vt AB. ad CD. ita AN. ad CK. & quia eſt ex conſtructione vt EF. ad GH. ita FO. ad MH. erit vt EO. ad GM. ita EF. ad GH. id eſt, AB. ad CD. erit ergo vt AN. ad CK. ita EO. ad GM. Quare cum primæ AN. & tertiæ EO. additæ ſint æquales. NI. OL. ſitque prima maior quam tertia, erit per octauam propoſitionem huius, minor ratio AI. ad CK. quam EL. ad GM. Quod erat demonſtrandum.



12.5. 12.5. 11.5. 8. huius.

COROLLARIVM.

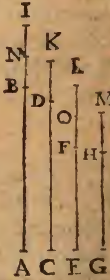
Eodem modo oſtendetur, ſi ſit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam; quibus ſingulæ quantitates addantur, ita vt additæ ad primam & tertiam, item additæ ad ſecundam & quartam ſint æquales, & ſit prima quantitas maior quam ſecunda, ſed minor quam tertia, & primum additum maius ſecundo, maior erit ratio primæ cum addita ad ſecundam cum addita, quam tertiæ cum addita, ad quartam cum addita. In ſuperiori figura ſtatuatur EF. prima, GH. ſecunda, AB. tertia, CD. quarta, ſi reliqua omnia fiant, vt in ſuperiori iuſſum eſt, inueniemus minorem eſſe rationem AI. ad CK. quam EL. ad GM. ideoque maiorem eſſe rationem EL. primæ cum addita, ad GM. ſecundam cum addita quam AI. tertiæ cum addita, ad CK. quartam cum addita.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI ſit vt prima quantitas ad ſecundam, ita tertia ad quartam, ex quibus ſingulæ quantitates demantur, ita vt ſubtractæ ex prima & tertia, item ex ſecunda & quarta ſint æquales; & ſit prima quantitas maior quam ſecunda ac tertia, primumque

detractum maius ſecundo; maior erit ratio primi reſidui ad ſecundum quam tertij ad quartum.

SIT vt prima quantitas AI. ad ſecundam CK. ita tertia EL. ad quartam GM. ex quibus ordine demantur IB. KD. LF. MH. ſintque IB. LF. æquales, item KD. MH. inter ſe æquales, AI. autem maior quam CK. aut EL. & IB. quam KD. Dico maiorem eſſe rationem AB. ad CD. quam EF. ad GH. Fiat vt CK. ad AI. ita DK. ad IN. Item vt GM. ad EL. id eſt, CK. ad AI. (mi-
14.5. nor nempe ad maiorem) ita H. M. ad OL. erit
11.5. IN. minor quam BI. & OL. minor quam FL. Igitur erit vt DK. ad IN. ita, HM. id eſt DK. ad
9.5. OL. æquales ergo ſunt OL. IN. quæ ſi demantur ex æqualibus FL. BI. remanent etiam æquales
19.5. OF. BN. Cum igitur ſit vt AI. ad CK. ita NI. ad KD. erit & reſiduum AN. ad reſiduum CD. vt totum AI. ad totum CK. Et quia eſt etiam vt EL. ad GM. ita OL. ad MH. erit reſidui EO. ad reſiduum GH.
11.5. vt totum EL. ad totum GM. id eſt, vt AI. ad CK. Igitur erit vt AN. ad CD. ita EO. ad GH. Rurſus ex AN. prima & EL. tertia demptis æqualibus BN. FO. erit, per nonam huius, maior
9. huius. ratio AB. ad CD. quam EF. ad GH. Quod fuerat demonſtrandum.



COROLLARIVM.

Non aliter oſtendetur, ſi ſit vt prima quantitas ad ſecundam ita tertia ad quartam, ex quibus ſingulæ quantitates demantur, ita vt ſubtractæ ex prima & tertia, item ex ſecunda & quarta ſint æquales, & ſit prima quantitas maior quam ſecunda, ſed minor quam tertia; ac primum detractum maius ſecundo; minor erit ratio primi reſidui ad ſecundum, quam tertij ad quartum. Hoc probabimus ratione ſimili qua vſi ſumus in ſuperioribus corollarijs, ſi EL. ſtatuatur prima quantitas, GM. ſecunda AI. tertia CK. quarta. Nam ſi reliqua fiant, vt in propoſitione dictum

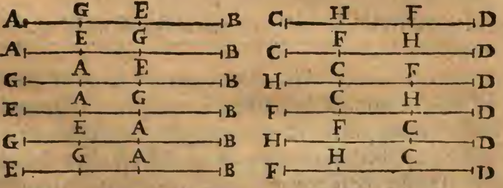
eſt,

eſt, inueniemus maiorem eſſe rationem AB. ad CD. quam EF. ad GH. ideoque minorem eſſe proportionem EF. ad GH. quam AB. ad CD.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI fuerint quatuor magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ ſe ſe eodem ordine ſuperent, ſitque primæ ad ſecundam in primis magnitudinibus maior ratio, quam primæ ad ſecundam in ſecundis, & tertia ad quartam minorem habeat rationem in primis, quam in ſecundis, ſitque tertia magnitudo differentia, aut aggregatum primæ & ſecundæ; minor erit ratio ſecundæ ad quartam in primis, quam in ſecundis magnitudinibus.

SINT quatuor magnitudines priores BA. AG. BG. GE. & quatuor poſteriores DC. CH. DH. HF. quæ ſeſe eodem ordine ſuperent, ſitque maior ratio BA. ad AG. quam DC. ad



CH. minor autem BG. ad GE. quam DH. ad HF. ſitque GB. differentia ipſarum BA. AG. (vt in prima, ſecunda & quarta ſerie) aut earundem aggregatum, vt in reliquis. Dico minorem eſſe rationem AG. ad GE. quam CH. ad HF. Cum enim ſit maior ratio BA, ad AG. quam DC. ad CH. erit in prima, ſecunda & quarta ſerie, diuidendo, & conuertendo, in reliquis componendo, & conuertendo, minor ratio AG. ad GB.

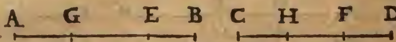
quam

quam CH. ad HD. ſed GB. ad GE. etiam minor ratio poſita eſt, quam HD. ad HF. igitur ex æqualitate, minor erit ratio AG. ad GE. quam CH. ad HF. Quod erat oſtendendum.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ ſeſe eodem ordine ſuperent, ſitque primæ priorum ad ſecundam maior ratio, quam primæ poſteriorum ad ſecundam; primæ autem priorum ad tertiam minor ratio, quam primæ poſteriorum ad tertiam, ſitque prima maior quam ſecunda, & tertia; maior erit ratio differentiæ primæ, & ſecundæ, ad diffetentiam primæ, & tertiæ in prioribus magnitudinibus, quam in poſterioribus.

SINT tres magnitudines AB. BE. BG. priores, & tres CD. DF. DH. poſteriores, ſitque tam prima priorum AB. maior ipſis BE. BG. quam CD. prima poſteriorum maior ipſis DF. DH. ſitque maior ratio AB. ad BE. quam CD. ad



DF. minor autem ratio AB. ad BG. quam CD. ad DH. Dico maiorem eſſe rationem AE. differentiæ primæ, & ſecundæ, ad AG. differentiam primæ, & tertiæ in primis magnitudinibus, quam ſit ratio CF. differentiæ primæ, & ſecundæ, ad CH. differentiam primæ, & tertiæ in ſecundis magnitudinibus. Quoniam maior eſt ratio AB. ad BE. quam CD. ad DF. & permutando maior ratio totius AB. ad totum CD. quam partis EB. ad partem FD. maior etiam erit ratio reſidui AE. ad reſiduum CF. quam totius AB. ad totum CD. & permutando maior ratio AE. ad AB. quam CF. ad CD. Eodem modo cum minor ſit ratio AB. ad BG. quam CD. ad DH. & permutando minor ratio totius AB. ad totum CD. quam partis GD. ad partem HD.

HD. erit & reſidui AG. ad reſiduum CH. minor ratio quam totius AB. ad totum CD. & permutando ac conuertendo maior ratio AB. ad AG. quam CD. ad DH. Cum igitur maior ſit ratio AE. ad AB. quam CF. ad CD. & maior ratio AB. ad AG. quam CD. ad DH. erit ex æqualitate maior ratio AE. ad AG. quam CF. ad CH. Quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc etiam aperte oſtenditur, minorem eſſe rationem differentiæ primæ, & ſecundæ magnitudinis, ad differentiam ſecundæ, & tertiæ in primis magnitudinibus, quam in ſecundis: videlicet minorem eſſe rationem AE. ad EG. quam CF. ad FH. cum enim oſtenſum ſit maiorem eſſe rationem AE. ad AG. quam CF. ad CH. erit per conuerſionem rationis minor ratio AE. ad EG. quam CF. ad FH.

COROLLARIVM II.

Præterea ſequitur minorem eſſe rationem ſecundæ magnitudinis, ad differentiam ſecundæ, & tertiæ in primis magnitudinibus, quam in ſecundis: videlicet minorem eſſe rationem EB. ad EG. quam FD. ad FH. Nam cum poſita ſit ratio AB. ad BE. maior quam CD. ad DF. erit per conuerſionem rationis, & diuidendo minor ratio BE. ad EA. quam FD. ad CF. ſed AE. ad EG. (ex præcedenti Corellario) minorem habet rationem quam CF. ad FH. Igitur ex æquali, BE. ad EG. minorem habet rationem, quam DF. ad FH.

COROLLARIVM III.

Conſtat etiam maiorem eſſe rationem, AB. primæ quantitatis, ad GE. differentiam ſecundæ, & tertiæ, quam GD. ad HF. cum enim in ſuperiori Corollario oſtenſum ſit minorem eſſe rationem BE. ad GE. quam DF. ad FH. erit componendo, minor ratio

BG.

BG. ad GE. quam DH. ad HF. Et rurſus cum ſit minor ratio AB. ad BG. quàm CD. ad DH. erit ex æquali minor ratio AB. ad GE. quam CD. ad HF.

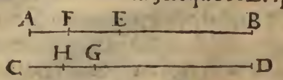
SCHOLIVM.

QVod ſi propoſito primæ ad ſecundam fuerit minor in primo ordine quàm in ſecundo, & primæ ad tertiam maior, in primo quam in ſecundo, hinc etiam in concluſionibus ſeu demonſtrationibus, verſa maiori proportione in minorem, omnia eo modo ſequentur, quo in propoſitione: vt ſi minor fuerit ratio AB. ad BE. quam CD. ad DF. maior autem AB. ad BG. quam CD. ad DH. ſequetur, vt in propoſitione, minorem eſſe rationem AE. ad AG. quàm CF. ad CH. in primo Corollario, minorem rationem AE. ad EG. quam CF. ad FH. In ſecundo, maiorem eſſe rationem BE. ad EG. quam DF. ad FH. in tertio denique maiorem rationem AB. ad GE. quam CD. ad HF.

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI ex prima quantitate, quæ æqualis ſit ſecundæ aut minor, auferantur tertia & quarta, & ex ſecunda, quinta & ſexta, ſitque tertia maior quam quarta & quinta, & quinta quam ſexta, & differentia tertiæ & quartæ aut maior aut æqualis differentiæ quintæ & ſextæ; maior erit ratio complementi quartæ ad complementum tertiæ, quam complementi ſextæ, ad complementum quintæ.

SINT duæ quantiates æquales, prima AB. ſecunda CD. ex prima auferantur AE. tertia, & AF. quarta; Item ex CD. ſecunda demantur CG. quinta & CH. ſexta, ſitque AE. ipſa CG. maior, & differentia FE. maior, aut æqualis differentiæ HG. Dico maiorem eſſe rationem FB. complementi ipſius AF. ad EB.



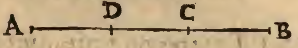
com-

complementum ipſius AE. quam HD. complementi ipſius
CH. ad GD. complementum ipſius CG. Quoniam enim
ex æqualibus quantitatibus, AB. CD. inæquales demptæ
ſunt AE. maior CG. minor, ſupereſt EB. minor, GD. ma- 5.axio-
ior. Igitur minor eſt ratio BE. ad EF. quam BE. ad GH. & ma.
BE. ad GH. minor quam DG. ad GH. Igitur minor eſt ratio 8.5. 8.5.
BE. ad EF. quam DG. ad GH. & componendo, ac per con-
uerſionem rationis, maior eſt ratio FB. ad BE. quam HD. ad
DG.

Idem etiam ſequetur, ſi FE. & HG. ponantur æquales, aut AB. minor quam CD. Quod euidentius eſt quam vt probatione indigeat.

LEMMA.

SI ſint tres magnitudines continue proportionales; habebunt differentiæ eandem rationem quam magnitudines.



SINT tres magnitudines AB. AC. AD. in continua proportione, quarum differentiæ ſint BC. CD. Dico eſſe vt AC. ad AD. ita BC. ad CD. Nam quoniam eſt vt AB. ad AC. ita AC. ad AD. erit diuidendo, & permutando vt BC. ad CD. ita AC. ad AD. ideſt AB. ad AC. quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XV. PROPOS. XV.

SI ſint tres magnitudines in continua proportione maiori, ſintque priores poſterioribus maiores: maior erit ratio differentiæ magnitudinis primæ & ſecundæ, ad differentiam ſecundæ & tertiæ,

quam magnitudinis primæ ad ſecundam, aut ſecundæ ad tertiam.

SINT tres magnitudines AB. AC. AD. in continua proportione maiori, ſitque BC. differentia primæ & ſecundæ magnitudinis, & CD. differentia ſecundæ & tertiæ, ſitque AB. maior quam AC. & AC. quam AD.



Dico maiorem eſſe rationem BC. ad CD. quam AB. ad AC. aut AC. ad AD. Fiat vt BA. ad
10.5. CA. ita CA. ad AE. erit AE. minor quam AD· cadetque punctum E. inter D. & A. Quare cum ſit vt AB. ad AC. ita AC. ad
lēma precedens AE. erit vt BC. differentia primæ & ſecundæ magnitudinis, ad CE. differentiam ſecundæ & tertiæ, ita AB. ad AC. ſed
8.5. maior eſt ratio BC. ad CD. quam BC. ad CE. igitur maior eſt ratio BC. ad CD. quam AB. ad AC: ſed etiam AB. ad AC. maior eſt quam AC. ad AD. Igitur maior eſt ratio BC. ad CD. quam AC. ad AD. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

SI ſint tres magnitudines in continua proportione minori, ſintque priores poſterioribus maiores: minor erit ratio differentiæ primæ & ſecundæ magnitudinis, ad differentiam ſecundæ & tertiæ, quàm magnitudinis primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam.

SIT minor ratio AB. ad AC quam AC. ad AD. ſintque priores poſterioribus maiores, & differentiæ ſint BC. CD. Dico minorem eſſe rationem BC. ad CD. quam AB. ad AC. aut
10.5. AC. ad AD. Fiat vt AB. ad AC. ita CA. ad AE. erit AE. ma-
lēma ior quam AD. & cadet inter D. & C. Erit igitur, per lemma
15. huius. præcedens, eadem ratio BC. ad CE. quæ AB. ad AC. ſed ratio

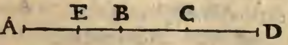
tio BC. ad CD. minor eſt quam ratio BC. ad CE. igitur minor 8.5.
eſt quàm ratio AB. ad AC. ideoque etiam quam AC. ad AD. quæ ratione AB. ad AC. minor poſita eſt. Quod erat oſtendendum.



THEOREMA XVII. PREPOS. XVII.

SI fuerint tres magnitudines in continua proportione maiori, ſintque priores poſterioribus minores; minor erit ratio differentiæ primæ magnitudinis & ſecundæ, ad differentiam ſecundæ & tertiæ, quam magnitudinis primæ ad ſecundam, aut ſecundæ ad tertiam.

SIT maior ratio AB. ad AC. quam AC. ad AD. ſintque priores poſterioribus minores, & differentiæ ſint BC. CD. Dico minorem eſſe rationem BC. ad CD. quam AB. ad AC. & AC. ad AD. Fiat vt AC. ad AD. ita AE. ad AC. minor erit AE. quam AB. cadetque punctum E. inter 10.5.
A. & B. Igitur cum ſit vt AE. ad AC. ita AC. ad AD. erit, per lemma præcedens, vt AC. ad AD. ita EC. ad CD. ſed BC. ad Lēma 15. huius
CD. minorem habet rationem quam EC. ad CD. 8.5.
Igitur minorem habet rationem quam AC. ad CD. ſed AC. ad AD. minorem habet quam AB. ad AC. igitur BC. ad CD. etiam minorem habet quam AE. ad EC. Quod erat, &c.



THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

SI fuerint tres magnitudines in continua proportione minori, & ordine minores; maior erit ratio differentiarum quàm magnitudinum.

SIT minor ratio AB. ad AC. quàm AC. ad AD. minorque ſit AB. quam AC. & AC. quam AD. & differentiæ, vt prius BC. CD. Dico maiorem eſſe rationem BC. ad CD. quam AB. ad AC. aut AC. ad AD. Fiat vt AC. ad AD. ita AE. ad AC.
10.5. erit AE. maior quam AB. cadetque inter pũcta BC. cum igitur ſit vt AE. ad AC. ita AC. ad AD. erit per lemma 15. huius vt AC. ad AD.

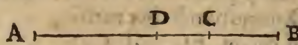


8.5. ita EC. ad CD. ſed BC. ad CD. maiorem habet rationem, quàm EC. ad CD. igitur etiam maiorem habet rationem quam AC. ad AD. ſed etiam AC. ad AD. maiorem habet rationem quàm AB. ad AC. ergo BC. ad CD. maiorem habet rationem quam AB. ad AC. Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

SI fuerint tres quantitates in continua ratione maiori, & ordine maiores; duæ differentiæ cum tertia quantitate erunt in continua ratione maiori.

SINT tres quantitates AB. AC. AD. AB. maior quã AC. & AC. quam AD. maiorque ſit ratio AB. ad AC. quam AC. ad AD. Dico maiorem eſſe rationem BC. ad CD. quam CD. ad DA. Quoniam enim tres quantitates AB. AC. AD. ſunt in continua proportione maiori, maior erit ratio differentiæ BC. ad differentiam



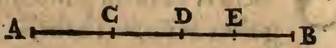
15. huius CD. quam CA. ſecundæ magnitudinis, ad DA. tertiam ſed
8.5. CA. ad AD. maiorem habet rationem quam CD. ad AD. ergo multo maiorem habet BC. ad CD. quam CD. ad DA.

THEO-

THEOREMA XX. PROPOS. XX.

SI fuerint quotcumque quantitates in continua proportione maiori, & ordine maiores; maior erit ratio primæ differentiæ ad ſecundam differentiam, quam vltimæ differentiæ ad vltimam magnitudinem.

SINT quatuor quantitates AB. CB. DB. EB. ſitque maior ratio AB. ad CB. quam CB. ad DB. & DB. ad EB. & AB. maior quam CB. & CB. quam DB. & DB. quam EB. Dico maiorem eſſe

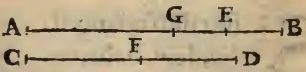


rationem AC. ad CD. quàm DE. ad EB. Quoniam maior 15.
eſt ratio AC. ad CD. quam AB. ad CB. id eſt quam CB. huius
ad DB. & DB. ad EB. at vero DB. ad EB. maior eſt quam DE. 8.5.
ad EB. maior ergo erit ratio AC. ad CD. quam DE. ad EB. Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

SI habuerit prima quantitas ad ſecundam maiorem rationem, quam tertia ad quartam, fueritq; prima maior quàm ſecunda, aut tertia: etiam differentia primæ & ſecundæ erit maior, quàm differentia tertiæ & quartæ.

HABEAT prima quantitas AB. ad ſecundam EB. maiorem rationem quam tertia CD. ad quartam FD. ſitque AB. maior quam AE. aut CD. Dico maiorem eſſe AE. differentiam primæ & ſecundæ, quàm CF. differentiam tertiæ & quartæ.



Cum enim maior ſit ratio AB. ad BE. quam CD. ad DF. erit eadem 10.5.

ad

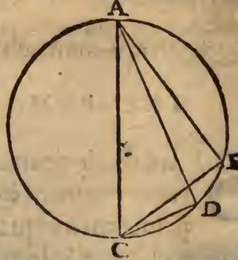
BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

ad maiorem aliquam BG. ſit igitur vt AB. ad BG. ita CD. ad DF. erit per connerſionem ra tionis vt AB. ad AG. ita CD. ad CF. & permutando vt AB. ad CD. ita AG. ad CF. Sed maior eſt AB. quam CD. ex hypotheſi, igitur maior eſt AG. quam CF. & adhuc maior AE. quam CF. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

SI duo arcus circuli inæquales ſint ſuis complementas ad idem punctum minores, ſinguli ſingulis; maiorem habebunt rationem quàm complementa, ſi maiores cum minoribus comparentur.

SIT circulus CEA. in quo arcus duo inæquales CD. minor, CE. maior, quorum complementa ad idem punctum A. ſint arcus DA. minoris, EA. maioris, ille maior quam CD. hic quam CE. Dico maiorem eſſe rationem CE. ad CD. quam AD. ad AE. Cum. n. maior ſit arcus AE. arcu EC. ideoque arcu CD. ſi duobus AE. CD.
1. huius addatur communis DE. maior erit ratio AE. ad CD. quã AD. ad CE. Et permutando maior AE. ad AD.
Corol. quam CD. ad CE. ideoque maior
26.5. CE. ad CD. quam AD. ad AE. Quod fuit oſtendendum.

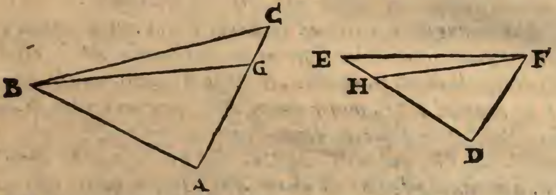


THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

SI ſint duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia, reliquos duos inęquales, quorum neuter ſit obtuſus; minor erit ratio lateris adiacentis angulo maiori, ad latus oppoſitum angu-

angulo ęquali in vno triangulo, quam lateris adiacentis angulo minori, ad latus oppoſitum angulo ęquali, in altero triangulo.

SINT duo triangula ABC.DEF. quorum anguli ad A.D. ſint æquales, angulus vero ABC. maior quam DEF. ideoque 32.1.



ACB. minor quam DFE. nullus autem angulorum ad B. C. E. F. ſit obtuſus. Dico minorem eſſe rationem AB. lateris adiacentis angulo maiori ABC. ad latus BC. oppoſitum angulo æquali A. quam lateris DE. adiacentis angulo minori DEF. ad latus EF. oppoſitum angulo æquali D. Fiat angulus ABG. æqualis angulo DFE. erit triangulum ABG. æquiangulum triangulo AEF. Igitur angulus AGB. æqualis angulo DFE. 32.1.
cum vero angulus DFE. id eſt AGB. non ſit obtuſus, erit vel rectus vel acutus, ſi rectus erit eius complementum BGC. etiam 13.1.
rectus; ſi acutus erit angulus BGC. obtuſus, ergo angulus 32.1.
BCG. acutus; maius igitur latus BC. quam BE. Cum igitur in 19.1.
triangulis æquiangulis DEF. ABG. ſit vt DE. ad EF. ita AB. ad 4.6.
BG. habeat autem AB. ad BG. maiorem rationem quam AB. 8.5.
ad BC. etiam DE. ad EF. maiorem habebit rationem quam 13.5.
AB. ad BC. atque adeo minor eſt ratio lateris AB. ad latus BC. quam lateris DE. ad latus DF.

Eodem modo demonſtrabimus minorem eſſe rationem DF. ad FE. quam AC. ad CB. ſi fiat angulus EFH. æqualis angulo BCA. idem enim prorſus efficitur.

CO-

COROLLARIVM I.

H*Inc ſequitur; ſi ſint duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia, reliquos duos inæquales, quorum neuter ſit obtuſus, minor erit ratio lateris oppoſiti angulo minori, ad latus oppoſitum angulo æquali in vno triangulo, quam lateris oppoſiti angulo maiori, ad latus oppoſitum angulo æquali in alio triangulo. Sint enim ſuperius duo triangula ABC. DEF. quorum anguli ad A. D. æquales, & angulus DFE. maior quam ACB. & angulus DEF. minor quam ABC. quorum nullus ſit obtuſus. Conſtat ex ſuperius demonſtratis minorem eſſe proportionem DF. ad FE. quam AC. ad CB. ſed DF. opponitur angulo DEF. qui minor oſtenſus eſt quam ABC. Igitur minor eſt ratio lateris DF. oppoſiti minori angulo E. ad latus EF. oppoſitum vni æqualium D. quam lateris AC. oppoſiti maiori angulo B. ad latus BC. oppoſiti angulo æquali A.*

COROLLARIVM II.

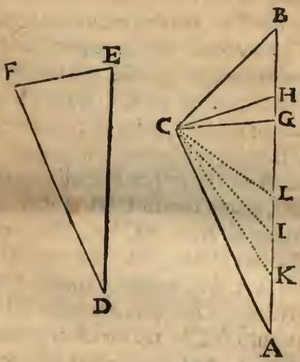
R*Vrſus poſitis quæ ſuperius, maior erit ratio lateris oppoſiti angulo æquali, ad latus oppoſitum angulo minori in vno triangulo, quam lateris oppoſiti alteri æqualium angulorum, ad latus oppoſitum maiori angulo. Oſtenſum enim eſt minorem eſſe rationem AB. ad BC. quam DE. ad DF. Igitur conuertendo maior erit ratio CB. oppoſiti vni angulorum æqualium A. ad latus AB. oppoſitum minori angulo C. quam lateris FE. oppoſiti alteri æqualium angulorum ad latus ED. oppoſitum maiori angulo DFE.*

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

SI ſint duo triangula quæ vnum angulum vni angulo æqualem habeant, habeat autem alterum ipſorum angulum quolibet angulo reliqui trian-

trianguli maiorem: maior erit ratio lateris oppoſiti angulo æquali, ad alterum latus adiacens angulo maximo, quam lateris oppoſiti angulo æquali, ad latus quodlibet reliquum in altero triangulo.

SINT duo triangula ABC. DEF· quorum illud habeat angulum ACB. maiorem quolibet angulorum DEF. DFE. ſintque anguli ad D.A.æquales. Dico maiorem eſſe rationem lateris BC.oppoſiti vni angulorum æqualium A. in triangulo ACB. ad latus CA. adiacens angulo ACB. quam lateris FE.oppoſiti alteri angulorum æqualium D. ad quodlibet laterum DE. DF. Sint enim primum anguli F. E.non obtuſi, & fiat angulus ACH. æqualis angulo DEF. cadet CH. intra triangulum, quod maior ſit angulus ACB. angulo DEF. cumque æquales ſint anguli D. A. æquiangula erunt triangula 32.1.



ACH. DEF: & anguli AHC. DFE. æquales, angulus autem DFE. ex hypotheſi vel rectus eſt, vel acutus. Igitur etiam angulus AHC. vel rectus eſt vel acutus ac proinde eius complementum CHB. vel rectus vel obtuſus, acutus igitur eſt CBA. 13.1. 32.1.
ideoq; maior eſt recta CB.quam recta CH. Igitur etiam maior 19.1.
eſt ratio BC.ad CA.quam HC. ad CA.id eſt quam FE. ad ED. 8.5.
(cum ſimilia ſint triangula FED. HCA.) in altero triangulo. 13.5.

Rurſus fiat angulus ACG. æqualis angulo EFD. eodem prorſus modo oſtendemus æquiangula eſſe triangula DEF. AGC. & angulum AGC. angulo FED. eſſe æqualem, qui cum ſit rectus aut acutus, erit CGB. rectus aut obtuſus, ſed B. oſtenſus eſt acutus; maius igitur latus CB. quàm CG. Quare

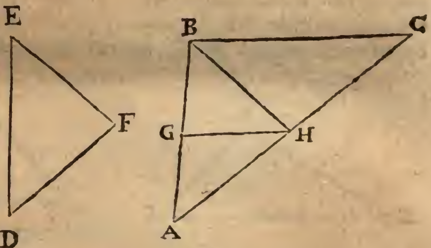
D maior

maior ratio BC. ad CA. quam CG. ad CA. id eſt quam EF. ad FD. Quod erat oſtendendum. Iam vero ſit DEF. obtuſus, ex hypotheſi minor quàm BCA. ac proinde DFE. acutus, fiatque angulus ACH. æqualis angulo DEF. erit angulus ad H. æqualis angulo ad F. ex paulo ante demonſtratis, ideoque acutus, quare eo modo quo prius probabitur maiorem eſſe rationem BC. ad CA. quam FE. ad ED. Sed angulo FED. obtuſo fiat æqualis CGA. cum æquales ſint anguli CGA. GAC. angu-
32.1. 4.6. lis FED. EDF. æquiangula ſunt triangula FED. CGA. quare & ſimilia. Rurſus maior eſt recta BC. quam recta CG. vt mox oſtendemus. Quare cum ſit vt EF. ad FD. ita GC. ad CA. maior autem ſit ratio BC. ad CA. quam GC. ad CA. maior etiam erit ratio BC. ad CA. quam EF. ad FD. Quod vero CG. ſit minor quam CB. ita demonſtramus. Sumatur CI. æqualis ipſi CB. vel igitur punctum. G. cadit in punctum. I. vel vltra. I. verſus A. vel inter I. & B. Cadat primum in punctum. I. ſi fieri po-
5.1. teſt, erunt anguli CIB. CBI. æquales cum igitur tam anguli
32.1. trianguli ABC. BCA. CAB. quam duo CIA. CIB. æquales ſint
13.1. duobus rectis, ablatis æqualibus CBI. CIB. remanebunt duo BCA. CAB. æquales angulo CIA. ergo angulus CIA. maior eſt angulo ACB. ſed angulo CIA. ponitur æqualis FED. ergo angulo ACB. maior eſt angulus FED. quod eſt contra hypotheſim, qua ponebatur minor. Quod ſi dicatur cadere in
16.1. punctum K. inter I. & A. adhuc maior erit angulus ille, cum maior ſit angulus externus AKC. interno & oppoſito AIC. Si
19.1. vero cadat inter I. & B. vt in L. tunc CL. ſubtendens angulum acutum CIL. minor eſt recta CI. ſubtendente angulum obtuſum CLI. atque etiam ei æquali CB. atque hoc modo in quodcumque punctum cadat ipſum G. oſtendetur recta GC. minor quàm CB. Quare ſequetur quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

EX dictis colligitur ſi duo quælibet triangula comparentur, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habeant, maiorem eſſe

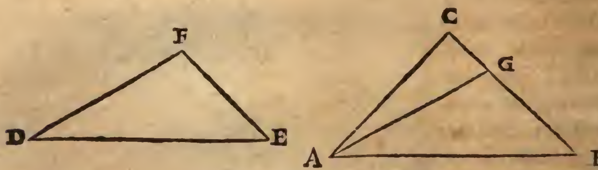
eſſe rationem lateris oppoſiti angulo æquali, ad latus adiacens angulo maiori in vno triangulo, quam lateris oppoſiti angulo æquali ad latus adiacens angulo minori in altero triangulo; & conuertendo, minorem eſſe rationem lateris adiacentis angulo maiori, ad latus oppoſitum angulo æquali, quam adiacentis angulo minori, ad oppoſitum angulo æquali; hoc enim duabus præcedentibus demonſtratum eſt. Excluſimus.a.in Coroll. 23.huius, ex angulis inæqualibus, obtuſum, non ſine ratione. Poteſt enim contingere ſi alterum triangulorum ſit amblygonium, vt non ſit minor ratio lateris oppoſiti angulo minori, ad latus oppoſitum angulo æquali in vno triangulo, quam ratio lateris oppoſiti angulo maiori in altero, ſed aliquando æqualis, aut maior. Sit triangulum ABC. obtuſiangulum ad B.& oxygonium DEF.cuique angulus EDF.æqualis angulo BAC. fiatque angulus ABH.æqualis angulo DEF. erunt triangula DEF. ABH. æquiangula, ac ſimilia. Ducatur HG.ipſi BC. parallela; Quod ſi fuerit GH. minor quam HB. aut angulus HGB.maior quam HBG. maior erit ratio AH. ad HG. id 8.5.
eſt AC. lateris oppoſiti angulo maiori ABC. ad CB. latus op- 4.6.
poſitum angulo æquali A.quam AH.ad HB. id eſt DF.latus oppoſitum angulo minori E. ad FE. latus oppoſitum angulo æquali D. Si vero HG.fuerit ipſi HB. æqualis & angulus HGB. angulo HBG.
æqualis, erit vt AH.ad HG.id eſt vt AC.ad CB.ita AH.ad HB.ſci- 4.6.
licet DF. ad FE. Sin autem GH. fuerit maior, & angulus HGB. minor angulo HBG.minor erit ratio AH. ad HG.id eſt AC. ad CB. 8.5.
quam AH.ad HB.ſeu DF. ad FE.



THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habuerint, reliquos inæquales: latus oppoſitum minori angulo vnius trianguli, ad latus oppoſitum maiori minorem habet rationem, quàm latus oppoſitum maiori angulo in alio triangulo, ad latus oppoſitum minori.

SINT duo triangula ABC. DEF. in quibus anguli ABC. DEF. æquales, reliquorum BAG. ſit maior quam EDF. atque ideo DFE. maior quam ACB. Dico rationem lateris AB. oppoſiti angulo BCA. minori quam DFE. ad BC. latus oppoſitum angulo BAC. maiori quam EDF. eſſe mino-



rem ratione lateris DE. oppoſiti angulo maiori F. ad latus FE. oppoſitum angulo minori D. Fiat angulus BAG. æqualis minori EDF. Cum æqualis poſitus ſit angulus B. angulo
32.1. E. & factus angulus BAG. æqualis angulo D. ęquiangula erunt
4.6. triangula ABG. DEF. eſt ergo vt DE. ad EF. ita AB. ad BG. ſed
8.5. AB. ad BG. maior eſt ratio quam AB. ad BC. Igitur etiam DE.
13.5. ad EF. maior eſt ratio quam AB. ad BC. atque adeo minor eſt ratio AB. ad BC. quam DE. ad EF.

CO-

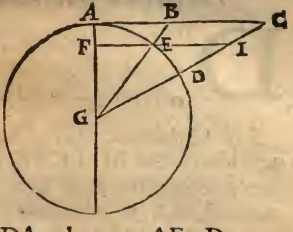
COROLLARIVM.

E Odem modo oſtenditur, latus oppoſitum maiori angulo vnius trianguli, ad latus oppoſitum minori maiorem habere rationem, quam latus oppoſitum minori angulo in alio triangulo, ad latus oppoſitum maiori; oſtenſum enim eſt, maiorem eſſe rationem DE. ad EF. quam AB. ad BC.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

ARcuum inęqualium in Quadrante, tangens maioris ad tangentem minoris maiorem habet rationem, quam arcus maior ad minorem.

IN circulo AED. cuius centrum G. diameter GA. ſecans circulum in A. ſit arcus maior AD, minor AE. & ex puncto A. ducatur ipſi GA. perpendicularis AC. tangens circulum in A. quam productam quantumlibet ſecent rectæ ex G. centro per puncta E.D. ductæ, in punctis B. C. erit AC. tangens maioris arcus, & AB. minoris, ex definitione tangentium. Dico maiorem eſſe rationem CA. ad AB. quam arcus DA. ad arcum AE.



Ducatur ex E. termino minoris arcus ad AG. perpendicularis EF. quæ producta ſecet rectam GC. in puncto I. Quoniam minor eſt proportio trianguli FGE. ad triangulum EGI. quam ſectoris AGE. ad idem triangulum EGI. & rurſus minor eſt proportio ſectoris AGE. ad triangulum EGI. quàm eiuſdem ſectoris AGE. ad ſectorem EGD. minor erit proportio trianguli FGE. ad triangulum EGI. quam ſectoris AGE. ad ſectorem EGD. Sed vt triangulum FGE. ad triangulum EGI. ita recta FE. ad rectam EI. & vt ſector AGE. ad ſectorem EGD. ita arcus

8.5.
8.5.
Schol. 13.5.
1.6.
33.6.

cus AE. ad arcum ED. minor igitur erit ratio FE. ad EI. quam arcus AE. ad arcum AD. Quare conuertendo, & componendo, maior erit proportio FI. ad FE. id eſt. CA. ad AB. quam arcus AE. ad arcum AB. Quod erat demonſtrandum.

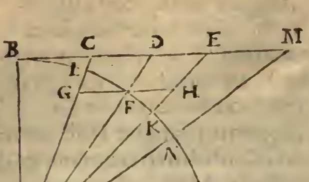
SCHOLIVM.

IN ſequentibus propoſitionibus ſæpe nominibus chordarum, ſinuum, tangentium, ſecantium vtemur quorum licet plæraque vetuſtioribus mathematicis incognita fuerint, a recentioribus tamen paſſim vſurpantur, in triangulorum præſertim calculis, quæ nos etiam ad Geometricas demonſtrationes traducemus, vt breuitati, ad quam mirum momentum habent, conſulamus: multa enim, quæ longis ambagibus deſcribenda eſſent, vnico verbo complectemur. Horum definitiones qui ignorat, reperiet apud Io. Regiomontanum lib. 1. de triangulis definit 12. & 13. Chriſtophorum Clauium tractatu de ſinubus; Maginum, Pitiſcum, Landsbergium, & alios quotquot de triangulis rectilineis ac ſphæricis ſcripſerunt.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

DIfferentia tangentium remotior à punto contactus ad vicinorem maiorem habet rationẽ, quam arcus illi reſpondens ad arcum.

IN Quadrante ABI. ducatur tangens BM., & ſumantur quotlibet arcus BL. LF. FK. KN. quorum primi propiores ſint puncto contactus B. & per puncta L. F.K. N. ducantur ſecantes AC. AD.AE.AM. erunt DC. ED. ME. differentiæ tangentium, quarum primæ viciniores ſunt puncto contactus B. Dico maiorem eſſe rationem ED. ad DC. quam arcus KF. ad arcum FL. & maiorem ipſius ME. ad DC. quam arcus NK. ad arcum FL. Vel enim



dif

differentiæ illæ coniunctę ſunt, vel ſeparatæ: ſint primo coniunctæ, ac per punctum F. in quo AD. circulum ſecat ducatur HG. ipſi MB. parallela ſecans AE. AC. in punctis H. G. Quoniam minor eſt ratio trianguli GAF. ad triangulum FAH. quam ſectoris LAF. ad idem triangulum FAH. & adhuc minor eſt ratio ſectoris LAF. ad triangulum FAH. quam eiuſdem ſectoris LAF. ad ſectorem FAK. minor erit ratio trianguli GAF. ad triangulum FAH. quam ſectoris LAF. ad ſectorem FAK. ideoque maior erit ratio ſectoris LAF. ad ſectorem FAK. id eſt arcus LF. ad arcum FK. quam trianguli GAF. ad triangulum FAH. id eſt quam GF. ad FH. ergo maior ratio HF. ad FG. id eſt rectæ ED. ad rectam DC. quam arcus KF. ad arcum FL. quod prius demonſtrare oportebat. 8.5. 13.5. 33.6. 1.6. 4.6. Cor. 16.5.

Sint ſecundo differentiæ illæ, vt ME. DC. ſeparatæ intermedia ED. cum maior ſit ratio ME. ad ED. ex paulo ante demonſtratis, quam NK. ad KF. & ratio ED. ad DC. etiam probata ſit maior quam KF. ad FL. erit ex æqualitate maior ratio ME. ad DC. quam NK. ad FL. Quod ſecundo erat demonſtrandum. Igitur differentia tangentium &c.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

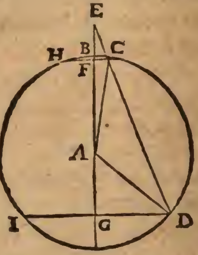
SI ex puncto vbi diameter circulum ſecat duo arcus inæquales ſumantur, ex quorum extremis ad diametrum duæ inter ſe parallelæ ducantur; maior erit ratio maioris arcus ad minorem, quàm lineæ ductæ ab extremo maioris arcus, ad eam quæ ab extremo minoris ducta eſt.

EX puncto B. vbi diameter AB. circulum BCD. ſecat, ſumantur duo arcus inæquales BC. minor BD. maior, ex quorum extremis C. D. ducantur parallelæ CF. DG. ſecantes diametrum in punctis F. G. Dico maiorem eſſe rationem arcus BD. ad arcum BC. quam rectæ DG. ad rectam CF. Connectantur

tur

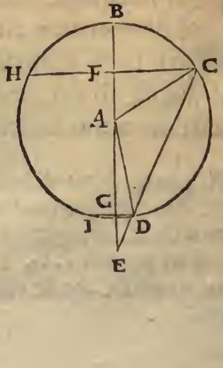
tur puncta CD. recta DCE. quæ vel concurret cum diametro producta, vt in prioribus figuris, vel erit parallela vt in poſte-



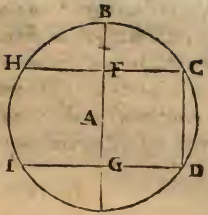


riori. Concurrat primo ex parte arcuum ſumptorum in E. &
8,5. ducantur AC. AD. Quoniam minor eſt ratio ſectoris BCA. ad
ſectorem ACD. quam trianguli ECA. ad eundem ſectorem
ACD. & adhuc minor trianguli ECA. ad ſectorem ACD. quàm
trianguli ECA. ad triangulum CDA. multo minor erit ratio ſe-
13.5. ctoris BCA. ad ſectorem ACD. id eſt, arcus BC. ad arcum GD.
33.6. quam trianguli ECA. ad triangulum CDA. id eſt rectæ EC. ad
1.6. rectam CD. & conuertendo, ac componendo, maior ratio ar-
cus DB. ad arcum BC. quam DE. ad EC. id eſt, quam DG.
4.6. ad CF.

Concurrat ſecundo DC. non ex parte arcuum ſumptorum, vt in tertia figura ſed in parte oppoſita, ſitque FC. maior quam GD. Conſtat maiorem eſſe rationem arcus DB. ad arcum BC. cum ſit maioris inæqualitatis, quam GD. ad FC. quæ proportio minoris inæqualitatis eſt.



Si vero DC. ſit parallela ipſi AB. cum parallelæ etiam ſint FC. GD. æquales erunt FC. GD. cum ergo maior ſit arcus DB. quam BC. maior erit ratio arcus DB. ad arcum CD. maioris inæqualitatis, quam ratio GD. ad FC. quæ æqualitatis eſt. Quod erat demonſtrandum. 34.1.



COROLLARIVM I.

Hinc patet, quod arcus maior ad minorem maiorem habet rationem, quam ſinus rectus arcus maioris, ad ſinum rectum minoris. Si enim tam CF. quam GD. ſint ad diametrum perpendiculares, manifeſtum eſt ex definitione ſinus, rectam CF. eſſe ſinum rectum arcus BC. & rectam DG. ſinum rectum arcus BD. oſtenſum autem eſt maiorem eſſe rationem arcus BD. ad arcum BC. quam rectæ DG. ad rectam CF.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam deducitur maiorem eſſe rationem arcus ad arcum, quam ſubtenſæ ſeu chordæ maioris arcus ad chordam minoris. Sint enim duo arcus DBI. CBH. ille maior, hic minor, quorum chordæ DI. CH. qui diuidantur bifariam, 3.3. *& ad rectos à diametro BA. in punctis G. F. Eodem modo oſtendemus maiorem eſſe rationem DB. ad BC. quam DG. ad CF. & ter-* 15.5. *minorum proportionis duplicatione, maiorem eſſe rationem arcus DBI. ad arcum CBH. quam chordæ DI. ad chordam CH.*

COROLLARIVM III.

Præterea ſequitur ex demonſtratis maiorem eſſe rationem arcus maioris ad minorem, quàm ſecantis complementi minoris arcus, ad ſecantem complementi maioris. Eſt enim, vt mo-

do de monſtratum eſt, maior ratio arcus maioris ad minorem quam ſinus recti maioris ad ſinum rectum minoris, vt autem ſinus rectus arcus maioris ad ſinum rectum minoris, ita ſecans complementi arcus minoris ad ſecantem complementi maioris. Igitur maior eſt ratio arcus maioris ad minorem, quam ſecantis complementi minoris ad ſecantem complementi maioris.

Clauius. 22. de ſecantibus.

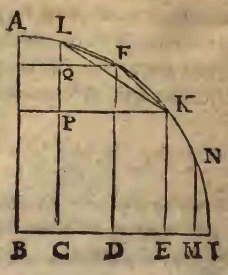
COROLLARIVM IV.

DEnique conſtat ſi ex puncto quolibet diametri producta ducatur recta circulum ſecans, maiorem eſſe rationem partis illius rectæ extra circulum ad eam quæ circuli arcum ſubtendit, quàm arcus diametro & ſecante comprehenſus ad arcum quẽ pars ſecantis ſubtendit: oſtenſum enim eſt maiorem eſſe rationem EC. ad CD. quam arcus BC. ad arcum CD.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

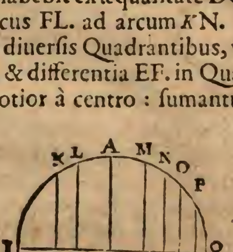
DIfferentia tam ſinuum rectorum quam verſorum vicinior centro circuli ad remotiorem maiorem habet rationem, quam arcus cui differentia ſubtenditur, ad arcum.

IN Quadrante ABI. cuius centrum B. latera BA. BI. ſumantur quotlibet arcus IN. IK. IF. IL. IA. & ducantur ſinus recti NM. KE. FD. LC. AB. paralleli diametro AB. erunt MI. EI. DI CI. ſinus verſi dictorum arcuum. Rurſus arcuum AL. AF. AK. AN. AI. ſinus recti erunt rectæ BC. BD. BE. BM. BI. & ME. ED. DC. differentiæ tam ſinuum rectorum quã verſorum. Dico maiorem eſſe rationem CD. quæ vicinior eſt centro B. ad DE. quæ remotior eſt, quam



quam arcus LF. ad arcum FK. Item maiorem eſſe rationem DC. ad ME. quam arcus FL. ad NK Ducantur chordæ KF. FL. KL. Item ex F. & K. perpendiculares ad AB. rectæ FG. KH. ſecantes CL. in punctis P.Q. Quoniam in triangulis rectangulis KPL. FQL. maior eſt angulus QLF. angulo PLK. minor erit reliquus QFL. reliquo PKL. Igitur minor eſt ratio 32.1.
PK. ad KL. quam QF. ad FL. & permutando minor ratio KP. 23. huius.
ad FQ. id eſt EC. ad DC. quam KL. ad LF. ſed KL. chorda 34.1.
arcus KL. ad FL. chordam arcus FL. minorem habet rationem Cor. 2.28.
quam arcus KL. ad arcum FL. Igitur recta EC. ad re- huius
ctam CD. minorem habet rationem, quàm arcus KL. ad ar- 13.5.
cum FL. & diuidendo, & conuertendo, maiorem habet rationem DC. ad DE. quam arcus FL. ad arcum FK. Atque eodem prorſus modo demonſtrabitur maiorem eſſe rationem DE. ad EM. quam arcus FK. ad arcum KN. & EM. ad MI. quam KN. ad NI. Sed non ſint differentiæ coniunctæ, vt DC. ac ME. Rurſus cum maiorem habeat rationem DC. ad DE. quàm arcus FL. ad arcum FK. Item etiam maiorem habeat DE ad EM. quã arcus FK. ad arcũ KN. habebit ex æqualitate DC. ad ME. maiorem rationem quam arcus FL. ad arcum KN.

Denique ſint dictæ differentiæ in diuerſis Quadrantibus, vt differentia DC. in Quadrante BAI. & differentia EF. in Quadrante BAQ. illa vicinior, hæc remotior à centro: ſumantur rectæ BG. BH. æquales ipſis BC. BD. erunt DC. GH. æquales & EF. remotior à centro quam GH. quare maior erit ratio GH. ad EF. quam arcus MN. reſpondentis ipſi GH. ad arcum OP. reſpondentem differentiæ EF; vt probatum eſt prima parte huius, ſed differentiæ GH. æqualis eſt differentia DC. & arcui MN. ar-

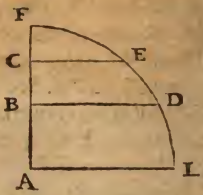


cus KL. Igitur maior eſt ratio DC. ad EF. quam arcus KL. ad 28.3.
arcum OP. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

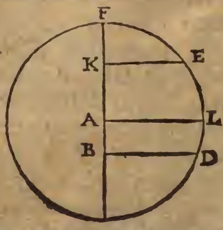
SI ſint duo arcus inæquales, minor vterque Quadrante, aut alter maior alter minor; maior ad minorem minorem habet rationem, quàm ſinus verſus maioris ad ſinum verſum minoris.

IN circulo FEL. ſumantur primum duo arcus in Quadrante FL. (cuius cētrum A. duæ diametri perpendiculares AF. AL.) ſcilicet DF. maior & EF. minor. Ex punctis E. D. in diametrum AF. ducantur ſinus recti DB. EC. erit BF. ſinus verſus maioris arcus DF. & CF. ſinus verſus minoris EF. Dico maiorem eſſe rationem BF. ad FC. quam arcus DF. ad arcum FE. Eſt enim FC. differentia FA. ſinus recti Quadrantis FEL. & ſinus recti CA. arcus EL. Item CB. eſt differentia ſinus recti CA. arcus EL. & ſinus recti AB. ar-



29. huius cus DL. Igitur maior eſt ratio differentiæ BC. vicinioris centro, ad differentiam CF. remotiorem, quam arcus DE. ad arcum EF. & componendo, maior eſt ratio BF. ad FC. quam DF. ad FE.

Sit ſecundo arcuum alter maior Quadrante, alter minor: vt, arcus FE. ſit minor Quadrante FL. & arcus FD. maior eodem Quadrante. Ductis ſinibus rectis EK. LA. DB. erit KF. ſinus verſus arcus FE. & BF. ſinus verſus arcus FD. Item AF. ſinus rectus Quadrantis FL. & AB. ſinus rectus arcus LD. Dico maiorem eſſe rationem BF. ad KF. quam arcus DF. ad arcum EF Quoniam maior eſt arcus FL. arcu



Cor. 2 28. huius LD. maior erit ratio arcus FL. ad ar-

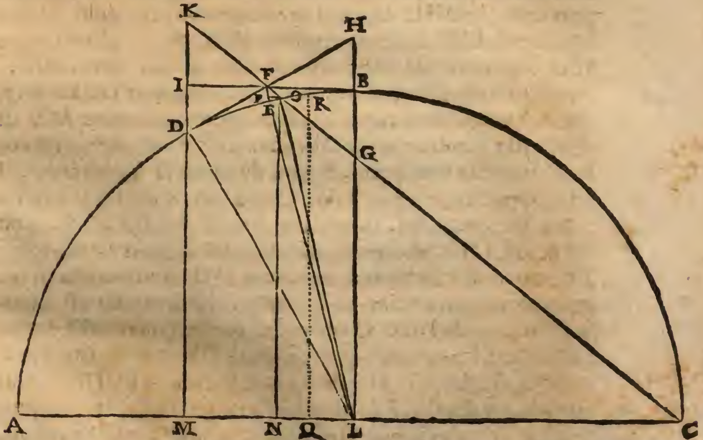
cum

cum LD. quam FA. ſinus recti arcus FL. ad AB. ſinum rectum arcus LD. Igitur maior ratio AB. ad AF. quam arcus LD. ad arcum FL. & componendo maior ratio BF. ad FA. quam DF. ad FE. ſed FA. ad FK. maiorem habet rationem quam LF. ad FE; vt prima parte huius propoſitionis demonſtratum eſt, ergo ex æquali maior eſt ratio BF. ad FK. quam ſinus DF. ad FE. ideoque minor ratio arcus DF. ad arcum FE. ſinus quam verſi BF. ad ſinum verſum KF. Quod ſecundo loco erat oſtendendum. Cor. 16.5.

PROBLEMA I. PROPOS. XXXI.

CIrculum ita ſecare, vt ſinus verſi arcuum Quadrante maiorum maiorem habeant rationem, quam arcus; ſi maiores cum minoribus comparentur.

CENTRO L. deſcribatur circulus ABC. cuius diame-



ter

ter AC. & ex L. ducta perpendicularis LB. ſecet circulum in duos Quadrantes AB. BC. & ſumatur arcus BD. qui ſit tertia pars Quadrantis. Item ex D. recta DM. perpendicularis diametro AC. Ex punctis autem D. & B. ducantur duæ rectæ DH. BI. tangentes circulum in punctis D.B.& occurrentes rectis LB. MD. productis in H. I. ac ſecantes ſe in puncto F. Per punctum F. ex puncto C. ducatur CFK. recta ſecans MD. productam in K. & circulum in O. & LB. in G.& ex O. ducatur ad diametrum perpendicularis ON. erunt MC. NC. ſinus verſi arcuum DC. OC. quadrante maiorum. Dico maiorem eſſe rationem MC. ad NC. quam arcus DBC. ad arcum OBC. Connectatur LF. ſecans circulum in E. Quoniam triangula LDF. LBF. rectum angulum LDF. recto LBF. æqualem habent, eſtque vt DL. ad LF. ita BL. ad LF.& quilibet reliquorum angulorum DFL. BFL. minor recto, æquales erunt anguli
32.1. DLE. BLE. ideoque æquales arcus DE. BE. ac cum DB. ſit
7.6. pars tertia Quadrantis, erit DE. ſexta pars eiuſdem, ac pro-
26.3. inde in triangulo rectangulo LDH. erit angulus DLH. tertia pars recti, & DHL. duæ tertiæ; ideoque in triangulo etiam rectangulo FBH. erit tam angulus HFB. quam ad verticem IFD. tertia pars, id eſt quinque decimæ quintæ vnius recti. Rurſus in triangulo rectangulo GCL. angulum GCL. id eſt OCA. metitur medietas arcus AO. quare cum arcus AD. ſit duæ tertiæ quadrantis, & DE. ſexta pars quadrantis, erit eorum medietas vna tertia, & vna duodecima Quadrantis, id eſt quinque duodecimæ ipſius Quadrantis; maior autem eſt
29.1. arcus AO. quam AE. Igitur angulus OCA. id eſt GCL. id eſt
15.1. GFB. id eſt IFK. maior eſt quinque duodecimis vnius recti. Eſt autem demonſtratum angulum IFD. continere tantum quinque decimas quintas vnius recti. Igitur maior eſt angulus IFK. angulo IFD. Quare poſito eodem ſinu toto FI. maior eſt ſecans KF. maioris anguli, ſecante FD. minoris; quibus ſi communis addatur FO. maior erit KO. quam duæ DF. FO. at
Archimedes. vero duæ rectæ DF. FO. maiores ſunt arcu DO. (vt mox probabimus) maior igitur eſt recta KO. arcu DO. minor autem

eſt

eſt chorda OC. arcu OBC. Igitur maior eſt ratio rectæ KO.ad 8.5.
rectã OC.quam eiuſdem KO.ad arcum OBC.& KO.ad arcum
OBC. maior quam arcus DO. (qui minor eſt recta KO.) ad 13.5.
arcum OBC. Igitur maior eſt ratio KO. ad OC. quam arcus 2.6.
DO. ad arcum OBC.ſed vt KO.ad OC. ita MN. ad NC. Igitur maior eſt ratio MN. ad NC. quam arcus DO. ad arcum OBC. & componendo maior ratio MC. ad NC. quam arcus DC. ad arcum OC. Quod erat demonſtrandum.

Quod verò maiores ſint DF. FO. quam arcus DO. ita probatur. Connectatur LO. & ducatur recta OP. tangens circulum in O. & ſecans LE. in P. ſupra punctum E. Cum in triangulo rectangulo LOP. angulus LOP. ſit rectus,erit LPO.acu- 32.1.
tus,ergo in triangulo OPF.angulus OPF. obtuſus; maius igitur eſt latus FO. latere PO. At vero maior eſt tangens DF. Archimedes. 1. de ſphæra & cylindro
arcu DE. & tangens OP. arcu EO. Igitur duæ tangentes DF. PO. ſunt maiores arcu DO. Sed duabus tangentibus DF. PO. maiores ſunt probatæ DF. FO. & ipſis DF. FO. oſtenſa eſt maior KO. Igitur maior eſt KO. quam arcus DO.

SCHOLIVM.

Poteſt etiam demonſtrari, ſi punctum aliquod ſumatur inter N. & L. vt punctum Q. & ducatur ſinus rectus QR. maiorem eſſe rationem ſinus verſi MC. ad ſinum verſum QC. quam arcus DBC. ad arcum RBC. ſi enim non ſit maior ratio MC. ad CQ. quam DBC. ad RBC.
ſit minor aut æqualis, ac ponatur primum minor. Cum maior ſit ratio 31. huius
MC. ad CN. quam arcus DC. ad arcum CO. minor autem ratio MC. ad
CQ. quam DC. ad CR. Igitur, ex 13. huius, maior erit ratio MN. ad 13. huius
MQ. quam arcus DO. ad arcum DR. & conuertendo, minor ratio QM.
ad MN. quam RO. ad DO. & diuidendo, minor ratio QN. ad NM. 29. huius
quam RO. ad OD. quod eſt abſurdum, oſtenſum enim eſt propoſitione 29. huius, maiorem eſſe rationem QN. ad NM. quam RO. ad OD.

Sed dicatur ratio MC.ad CQ. eadem eſſe rationi DC. ad CR. Quoniam eſt vt MC. ad CQ. ita DC. ad CR. erit per conuerſionem rationis, & conuertendo, vt MQ. ad MC. ita DR. ad DC. Iterum MC. ad CN. maiorem habet rationem quam DC. ad CO. vt in propoſitione oſtenſum eſt, erit per conuerſionem rationis, minor ratio MC. ad MN. quam DC.

ad

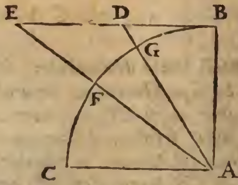
ad DO. Quare cum ſit vt MQ. ad MC. ita DR. ad DC. & MC. ad MN.
Schol. *minorem habeat rationem quam DC. ad DO. ex æqualitate, minor erit*
32.5. *ratio MQ. ad MN. quam DR. ad DO. & diuidendo minor ratio QN. ad*
29. *NM. quam RO. ad OD. Quod eſt abſurdum, cum ex 29. huius, maior*
huius *ſit ratio QN. ad NM. quam RO. ad OD.*

In hoc problemate aſſumpſimus principium Archimedis, chordam eſſe arcu minorem, tangentem eodem maiorem, quod ſi ideo minus Geometricum videtur, ſaltem idem momentum habeat, quod multæ Archimedis propoſitiones ex illo fonte deriuatæ, quibus cum fidem hactenus nemo niſi αγεωμέτρητος abrogarit, neque noſtram iiſdem natalibus ortam, tanquam ſpuriam quiſquam reiiciet.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXII.

TAngentis maioris arcus, ad tangentem minoris, maior eſt ratio, quam ſecantis maioris arcus ad ſecantem minoris.

IN Quadrante ABC. cuius centrum A. diameter AB. maioris arcus BF. ſit tangens EB. ſecans AE. & minoris arcus BG. ſit tangens DB. & ſecans AD. Dico maiorem eſſe rationem EB. ad DB. quam AE. ad AD.



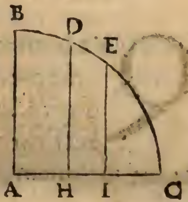
16.1. Cum enim in triangulis rectangulis ABD. ABE. maior ſit angulus ADB. externus interno
23. huius AEB. minor erit ratio BD. ad DA. quam BE. ad EA. & permutando, ac conuertendo, maior erit ratio EB. ad BD. quam AE, ad AD. Quod oſtendendum erat.

PROBLEMA II. PROPOS. XXXIII.

QVadrantem ita ſecare in duos arcus, vt ſinus verſi æqualem, minorem, maioremue ratio-

tionem habeant, quam aut ſecantes eorumdem arcuum, aut ſinus recti complementorum, minorem vero quam tangentes eorumdem arcuum, ſi maiores cum minoribus comparentur.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum A. diametri inuicem perpendiculares, AB. AC. Sumatur primum recta AH. æqualis rectæ IC. & ducantur perpendiculares ad AC. rectæ HD. IE. ſecantes peripheriam Quadrantis in D. E. erit AH. ſinus rectus arcus. BD. & AI. ſinus rectus arcus. BE. at vero IC. erit ſinus verſus arcus EC. & HC. ſinus verſus arcus DC. qui duo poſteriores arcus priorum ſunt complementa. Dico eandem eſſe rationem ſinus verſi HC. ad ſinum verſum IC. quæ eſt ſinus complementi IA. ad ſinum complementi HA. Cum enim æquales ſint AH. IC. addita communi AH. æquales erunt HC. IA. vt igitur ſinus verſus HC. ad ſinum verſum IC. ita ſinus rectus IA. ad ſinum rectum HA. vt vero IA. ad HA. ita ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. vt a Clauio demonſtratum eſt. prop. 22. de ſecantibus. Igitur vt ſinus verſus HC. arcus DC. ad ſinum verſum IC. arcus EC. ita ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC.



2. Pron.

Clauius p. 22. de tangentibus.

Sit ſecundo ſinus verſus CI. maior ſinu recto HA. addatur communis IH. Quoniam duabus lineis inæqualibus maiori CI. minori HA. eadem quantitas IH. addita eſt, habebit per primam huius HC. ad CI. minorem rationem quam IA. ad HA. & quam ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam oſtendimus modo eandem habere rationem quam IA. ad HA. 1. huius.

Sit tertio ſinus verſus IC. minor ſinu recto HA. addita communi HI. eodem modo, ex prima huius, demonſtratur; maiorem eſſe rationem HC. ad IC. quam IA. ad HA. aut quam ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. 1. huius.

23. huius. Deniq; cum maiorem habeat rationem tangens arcus DC. ad tangentem arcus EC. quam ſecans eiuſdem arcus DC. ad ſecantem arcus EC. ſecantes autem dictorum arcuum in duobus prioribus caſibus aut maiorem, aut æqualem rationem habeant, 13. 5. quam ſinus verſi eorumdem arcuum, habebit tangens arcus DC. ad tangentem arcus EC. maiorem rationem, quam HC. ſinus verſus arcus DC. ad IC. ſinum verſum arcus EC. Igitur quadrantem ita ſecauimus vt &c.

PROBLEMA III. PROPOS. XXXIV.

Qvadrantem ita ſecare in duos arcus, vt tam ſecans maioris ad ſecantem minoris, quam ſinus rectus complementi minoris, ad ſinum rectum complementi maioris, maiorem habeant rationem, quam arcus maior ad minorem.

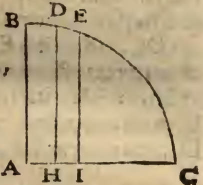
Fiant omnia quæ in duobus primis caſibus præcedentis propoſitionis. Dico maiorem eſſe rationem IA. ad HA. item ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam arcus DC. ad
33 huius. arcum EC. Cum enim, in primo caſu, ſit vt IA. ad AH. id eſt
Clau. p. 22. de ſecantibus. vt ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. ita HC. ſinus verſus arcus DC. ad IC. ſinũ verſum arcus EC. maior autem ſit ra-
30. huius. 13. 5. tio HC. ad IC. quam DC. ad EC. etiam IA. ad HA. & ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. maiorem habebunt rationem, quam arcus DC. ad arcum EC.

33. huius. Eadem, ac validiori ratione, in ſecundo caſu: cum maior ſit ratio IA. ad HA. item ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam HC. ad IC. & HC. ad IC. maior quam arcus DC.
13. 5. ad arcum EC. maior erit ratio IA. ad HA. & ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam ipſius arcus DC. ad arcum EC. Quare Quadrantem ita ſecauimus &c.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXV.

SInus recti duorum arcuum, quorum aut vterque minor eſt tertia parte Quadrantis, aut alter tertiæ parti Quadrantis æqualis, alter minor; maiorem habent rationem, quam arcus complementorum, ſi maiores cum minoribus comparentur.

Sit Quadrans ABC. cuius latera AB. AC. centrum A. in eo ſumantur duo arcus inæquales BD. minor DE. maior, ſitq; BD. minor tertia parte Quadrantis, & BE. aut æqualis tertiæ parti Quadrantis aut minor: & ducantur ad oppoſitum latus Quadrantis perpendiculares DH. EI. erit AH. ſinus rectus arcus BD. & AI. ſinus rectus arcus BE. Item erit arcus DC. complementum arcus minoris BD. & EC. complementum arcus maioris BE. arcuumque DE. EC. ſinus verſi HC. IC. Dico maiorem eſſe rationem IA. ad AH. quam arcus DC. ad arcum EC. Nam ſi BE. ſit tertia pars Quadrantis, erit AI. æqualis ipſi IC. Si vero BE. ſit minor tertia parte Quadrantis erit AI. minor quam IC. ac proinde AH. pars ipſius AI. erit multo minor quam IC. Quoniam igitur IC. maior eſt, quam AH. & addita eſt vtrique quantitas æqualis, imo eadem HI. maior eſt ratio CI. ad AH. quam CH. ad AI. & permutando maior ratio CI. ad CH. quam AH. ad AI. ideoque maior AI. ad AH. quam CH. ad CI. at CH. ſinus verſus arcus DC. ad IC. ſinum verſum arcus EC. maiorem habet rationem quam arcus DC. ad arcum CE. Igitur AI. ad AH. maiorem habet rationem quam arcus DC. ad arcum CE. Quod erat demonſtrandum.



1. huius.

30. huius.

13. 5.

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXVI.

SEcantes duorum arcuum inæqualium, quorum aut vterque ſit maior duabus tertijs Quadrantis, aut alter maior, alter æqualis; maiorem habent rationem, quam arcus ad arcum: ſi maiores cum minoribus conferantur.

In figura ſuperioris propoſitionis ſint ſinguli arcus EC. DC. maiores duabus tertijs Quadrantis, erunt tam EB. quam DB. minores vna tertia. Vel ſit. EC. duæ tertiæ erit CD. maior vna tertia, ac EB. vna tertia, BD. minor vna tertia. Dico maiorem eſſe rationem ſecantis DC. ad ſecantem EC. quam arcus DC. ad arcum EC. Nam ſuperiori propoſitione oſtenſum eſt maiorem eſſe rationem IA. ad AH. quam DC. ad EC. ſed vt IA. ad AH. ita ſecans arcus DC. ad ſecantem arcus EC. Igitur maior eſt ratio ſecantis arcus DC. ad ſecantem arcus EC. quam arcus DC. ad arcum EC. Quod fuit probandum.

Clau. p.22. de ſecantibus.

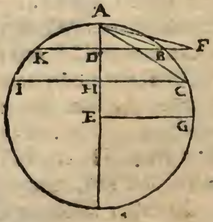
THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXVII.

DVorum arcuum inæqualium, quorum vterque ſit minor Quadrante, aut alter minori differentia Quadrantem excedat, quam alter ab eodem deficit; ſinus verſus maioris, ad ſinum verſum minoris maiorem habet rationem, quam tangens dimidij maioris ad tangentem dimidij minoris; & chorda maioris, ad chordam minoris maiorem habet rationem, quam ſecans dimidij maioris ad ſecantem dimidij minoris. Quod ſi defectus fuerit æqualis, æqualis erit proportio, ſi exceſſus defe-

ctum

ctum ſuperet, aut vterque arcus fuerit maior Quadrante, minor erit proportio eorumdem ſinuum verſorum inter ſe, quam tangentium; & chordarum, quam ſecantium.

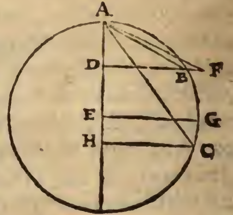
IN circulo ABG. cuius centrum E. diameter AE. ſecans circulum in A. ſit arcus maior AC. minor AB. illius chorda AC. huius AB. illius ſinus rectus CH. huius BD. ſecantes diametrum AE. in punctis HD. erit HA. ſinus verſus maioris arcus AC. & DA. ſinus verſus arcus minoris AB. ſitque primum vteruis arcus minor quadrante. Dico maiorem eſſe rationem HA. ad AD. quam tangentis dimidij arcus CA. ad tangentem dimidij AB. & maiorem AC. chordæ ad AB chordam, quam ſecantis dimidij arcus AC. ad ſecantem dimidij arcus AB. Producatur DB. quantum libet, & accipiatur DF. æqualis ſinui HC. qui cum ſit maior quam DB. cadet punctum F. vltra B. extra circulum, & connectatur AF. erit angulus ACH. dimidius anguli AEC. id eſt arcus AC. (productis enim rectis BD. CH. in circumferentię puncta K.I. angulus ACI. in ſiſtit arcui AI. qui arcui AC. eſt æqualis, & Angulus ABD. arcui AK. æquali ipſi AB.) & angulus ABD. dimidius anguli AEB. ſeu arcus AB. atque in triangulis rectangulis CHA. FDA. poſito ſinu toto CH. aut FD. illi æquali, erit HA. tangens anguli HCA. id eſt, medietatis arcus AC. & eius ſecans CA. Item DA. tangens anguli DFA. & FA. eius ſecans. Iam vero, quæ proportio HA. ſinus verſi arcus AC. ad DA. ſinum verſum arcus AB. eadem eſt HA. tangentis anguli HCA. ad DA. tangentem anguli DFA. nam vtrobique eſt proportio æqualitatis: ſed angulus AFD. minor eſt angulo ABD. minor eſt igitur tangens anguli AFD. tangente anguli ABD. Igitur maior eſt proportio HA. tãgentis anguli HCA. ad DA. tangentem anguli DFA.



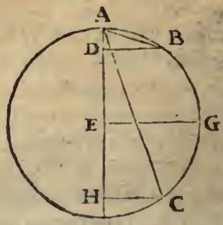
quam

quam ad tangentem anguli DBA. ſed vt HA. tangens anguli HCA. id eſt dimidij arcus AC. ad DA. tangentem anguli DFA. ita oſtenſus eſt HA. ſinus verſus arcus AC. ad DA. ſinum verſum arcus AB. Igitur maior eſt proportio HA. ſinus verſi arcus AC. ad DA. ſinum verſum arcus AB. quam HC. tangentis anguli HCA. ſeu medij arcus AC. ad tangentem anguli DBA. ſeu medij arcus AB.

Sed ſit arcus AC. maior quadrante, & ducta EG. perpendiculari ad diametrum AE. minor ſit arcus CG. quo quadrantem ſuperat; quam arcus BG. quo arcus AB. differt à Qua-
15.3. drante. Rurſus cum ſinus HC. ſit maior quã DB. cadet punctũ F. vltra punctum B. extra circulum; eodem prorſus modo quo prima parte huius, oſtendemus HA. ſinum verſum Arcus AC. ad AD. ſinum verſum arcus AB. maiorem habere rationem, quam HA. tangentem medij arcus AC. ad tangentem medij arcus AB.



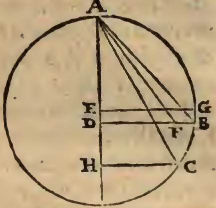
Sit ſecundò arcus GC. arcui GB. æqualis, ideoque rectæ DB. HC. æquales, cadatque punctum F. in ipſum C. Dico eamdem eſſe rationem HA. ſinus verſi arcus AC. ad DA. ſinum verſum arcus DA. quæ tangentis anguli HCA. id eſt medij arcus AC. ad tangentem anguli DBA. ſeu medij arcus AB. Nam cum in triangulis rectangulis æquales ſint ſinus toti HC. DB. erit HA. tangens anguli HCA ſeu dimidij arcus AC. & CA. eiuſdem ſecans: item DA. erit tangens anguli DBA. ſeu medij arcus AB. & AB. eiuſdem ſecans. Vt igitur HA. ſinus verſus arcus AC. ad DA. ſinum verſum arcus AB. ita HA. tangens dimidij, ad DA. tangentem dimidij.



In ſuper ſit arcus GC. quo ma-

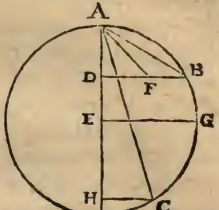
ior

ior arcus quadrantem ſuperat, maior arcu GB. quo minor à Quadrante ſuperatur: erit HC. magis diſtans à diametro, 15.3.
minor quam DB. quæ minus diſtat. Igitur ſumpta DF. æquali ipſi HC. cadet punctum F. inter D. & B. erit rurſus HA. tangens anguli HCA. & DA. tangens anguli DFA. qui cum ſit maior, quam angulus DBA. minor erit ratió tangentis HA. anguli HCA. ad tangentem anguli DFA. quam ad tangentem anguli DBA. ſed



vt HA. tangens Anguli HCA. ad tangentem anguli DFA. ita HA. ſinus verſus arcus AC. ad DA. ſinum verſum arcus AB. Igitur HA. tangens anguli HCA. id eſt dimidij arcus AC. ad tangentem anguli DBA. ſeu medij arcus AB. maiorem habet rationem, quam dictus ſinus verſus HA. ad ſinum verſum DA.

Denique ſint arcus AB. AC. vterque maior Quadrante: 15.3.
AB. minor & AC. maior: erit recta DB. vicinior diametro maior quam HC. ſumpta igitur DF. æquali ipſi HC. quæ cadat inter puncta D.B eodem rurſus modo quo proxima parte, oſtendemus maiorem eſſe proportionem tangentis dimidij arcus maioris, ad tangentem dimidij minoris, quam ſinus verſi arcus maioris ad ſinum verſum minoris.



Iam vero, quoniam in primo caſu 1. 16.
maior eſt angulus ABD. angulo AFD. maior erit ſecans anguli ABD. recta AF. ſecante anguli AFD. Rurſus, cum acutus
ſit angulus ABD. quia ADB. rectus; obtuſus erit ABF, ideo- 32. 1. 13. 1.
que AF. maior quam AB. maiorem igitur rationem habebit 19. 1.
chorda CA. arcus AC. ad chordam BA. arcus AB. quam ſe- 8. 5.
cans AC. anguli ACH. id eſt dimidij arcus AC. ad ſecantem anguli ABD. ſeu dimidij arcus AB.

In

In ſecundo vero caſu cum CA. ſit & ſecans anguli ACH. & chorda arcus AC. item BA ſecans anguli ABD. & chorda arcus AB. Eandem habebit rationem CA. ſecans Anguli ACH. id eſt dimidij arcus AC. ad BA. ſecantem Anguli ABD. ſeu dimidij arcus AB. quam CA. chorda arcus AC. ad BA. chordam arcus AB.

In vltimis caſibus Quoniam maior eſt angulus AFD. angulo ABD. minor erit ſecans anguli ABD. id eſt dimidij arcus AB. quam AF. ſecans anguli AFD; & quia angulus AFD. a-
32.1. 13.1. 19.1. 8.5. cutus eſt, erit AFB. obtuſus, ideoque maior AB. quam AF. Igitur minor eſt ratio CA. chordæ arcus AC. ad BA. chordam arcus AB. quam CA. ſecantis anguli ACH. ſeu dimidij arcus AC. ad ſecantem anguli ABD. ſeu dimidij arcus AB. Igitur duorum arcuum inæqualium &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex probatis colligitur, ſi ſinus rectus cum ſecante eiuſdem arcus comparetur, quoad maiorem vel minorem proportionem; idem de eo dicendum, quod de chorda dupli arcus, ac in priori caſu maiorem eſſe rationem ſinus recti arcus maioris ad ſinum rectum minoris, quam ſecantis maioris ad ſecantem minoris: in ſecundo æqualem: in tertio minorem; Nam, vt chorda arcus maioris, ad chordam minoris; ita ſinus rectus dimidij maioris, ad ſinũ rectum dimidij minoris. Cum medietas chordæ nihil aliud ſit, quam ſinus dimidij arcus: ſed in priori caſu, chorda arcus maioris, ad chordam minoris, maiorem habet rationem, quam ſecans dimidij maioris ad ſecantem dimidij minoris: Igitur ſinus dimidij arcus maioris ad ſinum dimidij minoris, maiorem habet rationem, quam ſecans dimidij maioris, id eſt eiuſdem arcus, ad ſecantem dimidij minoris. In ſecundo vero caſu, oſtenditur eſſe vt ſinum maioris arcus ad ſinum minoris, ita ſecantem maioris ad ſecantem minoris. In tertio minorem eſſe rationem ſinus arcus maioris, ad ſinum minoris, quam ſecantis maioris, ad ſecantem minoris.

THEO-

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXVIII.

DVorum arcuum inæqualium, quorum vterq; ſit minor ſemiquadrante, aut alter æquali, vel minori differentia ſemiquadrantem excedat, quam alter à ſemiquadrante deficit; ſecans maioris ad ſecantem minoris minorem habet rationem, quam arcus maior ad minorem.

IN propoſitione 37. huius, tribus primis figuris, ſit arcus AC. maior arcu AB. ita vt vterq; ſit minor quadrante, aut AC. maior AB. minor, ita vt exceſſus AC. ſupra quadrantem ſit aut minor, aut æqualis defectui arcus AB. à quadrante. Dico ſecantem dimidij arcus AC. ad ſecātem dimidij arcus AB. minorem habere rationem, quam arcum AC. ad arcum AB. Nam ex propoſitione 37. huius conſtat, minorem, aut æqualem eſſe rationem ſecantis dimidij arcus AC. ad ſecantem dimidij arcus AB. quam chordæ AC. ad chordam AB. ſed chorda AC. ad chordam AB. minorem habet rationem quam arcus AC. Cor. 2. 26. huius. ad arcum AB. id eſt quam dimidius AC. ad dimidium AB. 15. 5. ergo ſecans dimidij arcus AC. ad ſecantem dimidij arcus AB. minorem habet rationem, quam medius arcus AC. ad medium arcum AB. qui arcus ſecantibus reſpondent. Igitur duorum arcuum &c. quod erat &c.

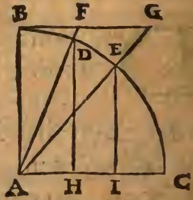
COROLLARIVM.

QVod ſi vterq; arcus ſit minor ſemi quadrante, ſecans maioris ad minorem, non tantum minorem habebit rationem, quam arcus maior ad minorem, ſed etiam quam complementum arcus minoris, ad complementum maioris. Nam in quadrante ABC. ſumantur duo arcus BE. BD. vterq; minor ſemiquadrante, quorum ſecantes AG. AF. in tangentem GB. incurrant, in punctis

G GF.

GF. erit DC. complementum minoris arcus DB. & EC. complementum maioris BE. Dico minorem eſſe rationem AG, ad AF. quam arcus DC. ad arcum. EC. Ducantur duo ſinus complementi DH. EI. minor erit ratio DH. ad EI. quam arcus DC. ad arcum EC. vt autem DH. ad EI. ita AG. ad AF. (hoc enim à Clauio demoſtratum eſt propoſ. 22. de ſecantibus, & deducitur ex 37. huius) igitur minor eſt proportio AG. ad AF. quam arcus DC. ad arcum EC.

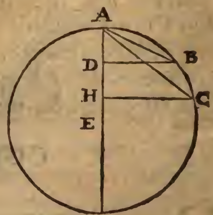
Corol. 1. 26. huius.



THEOREMA XXXVI. PROPOS. XXXIX.

SInus rectus maioris arcus, ad ſinum rectum minoris, minorem habet rationem, quam chorda maioris, ad chordam minoris; & chorda ad chordam minorem rationem, quam ſinus verſus maioris, ad ſinum verſum minoris.

IN circulo ABC. ſit arcus maior quilibet AC. minor AB. quorum chordæ CA. BA. ſinus recti CH. BD. ſinus verſi HA. DA. Dico minorem eſſe rationem CH. ad BD. quam CA. ad BA. & minorem CA. ad BA. quam HA. ad DA. Nam in triangulis rectãgulis AHC. ADB. cum maior ſit totus angulus BAD. ſui parte CAH. erit reliquus angulus ABD. minor angulo ACH. Conſtat igitur ex 23. huius, minorem eſſe rationem HC. ad CA. quam DB. ad BA. & permutando, minorem rationem eſſe HC. ad DB. quam CA. ad BA. Rurſus per eandem propoſitionem, cũ maior ſit angulus DAB.



23. huius.

angulo

angulo HAC. minor erit ratio DA. ad AB. quam HA. ad AC. & permutando,& conuertendo,maior ratio HA. ad DA. quam CA. ad BA. ideoq; minor CA. ad BA. quam HA. ad DA. Igitur ſinus rectus maioris arcus &c. quod erat probandum.

COROLLARIVM.

HInc conſtat ſinum rectum dimidij arcus maioris, ad ſinum rectum dimidij minoris, minorem habere rationem, quam ſinum verſum arcus maioris, ad ſinum verſum minoris. Nam ſinus rectus dimidij arcus AC. eſt medietas chordæ AC. & ſinus rectus dimidij arcus AB. eſt medietas chordæ AB. vt conſtat ex definitione ſinus recti: cum igitur vt tota chorda AC. ad totam AB. ita illius medietas, ad medietatem huius, ſitq; proportio chordæ AC. ad chordam AB. minor quam ſinus verſi HA. ad ſinum verſum DA. etiam ſinus rectus dimidij arcus AC. ad ſinum rectum dimidij AB. minor erit ratio, quam HA. ad DA.

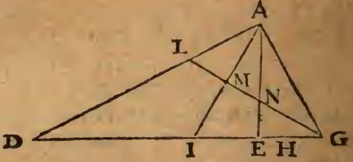
THEOREMA XXXVII. PROPOS. XL.

SI trianguli rectanguli rectum angulum perpendicularis in baſim demiſſa ſecet, & ex punctis, vbi latera baſi iunguntur, lateribus ipſis æquales partes ex baſi abſcindantur; rectæ ex trianguli angulo recto ad puncta ſectionis ductæ diuidunt angulos à perpendiculari cum lateribus factos, bifariam.

SIT triangulum GAD. rectangulum ad A. & ex puncto A. demiſſa AE. perpendicularis in baſim DG. ſecet angulum rectum in angulos DAE. GAE. & ex puncto G. ex baſi abſcindatur GI. æqualis lateri AI. & ex A. ducatur AI. Dico rectam AI. diuidere angulum DAE. bifariam Diuidatur angulus AGD. bifariam ducta GL. quæ ſecet. AE. in N. &

5.1. AI. in M. Quoniam æqualia ſunt latera GA. GI. in triangulo GAI. ex deſcriptione, æquales erunt anguli GAI. GIA.
32.1. ſed & ex deſcriptione, æquales ſunt AGM. IGM. æquales
10. Pron. igitur ſunt & reliqui. AMG. IMG. atq; ideo recti.

15.1. Rurſus cum in triangulis GEN. ANM. Anguli ad verticem N. æquales ſint, & GEN. AMN. recti, æquales erunt
8.6. & reliqui EGN. NAM. id eſt EAI. cum autem æquales etiam ſint EGA. EAD. ablatis æqualibus EAI. EGN. remanent æquales NGA. IAD. Igitur cum angulus EAI. ſit æqualis angulo EGN. & Angulus IAD. æqualis angulo NGA. ſint autem ex hypotheſi, anguli EGN. NGA. æquales, erunt & anguli EAI. IAD. æquales. Atq; idem etiam oſtenditur, ſi ipſi DA. æqualis ſumatur DH. eodem .n. prorſus modo probabitur, à recta AH. angulum EAG. bifariam diuidi. Igitur ſi trianguli rectanguli angulum rectum &c. Quod erat demonſtrandum.

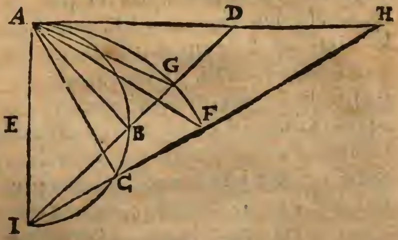


THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XLI.

Differentia ſecantis maioris arcus cum ſinu toto, ad differentiam ſecantis minoris, maiorem habet rationem, quam tangens maioris arcus ad tangentem minoris.

IN circulo AGF. cuius centrum. I diameter IA. ſumantur duo arcus inæquales maior AF. minor AG. quorum tangentes. AH. AD. ſecantes IH. ID. & differentiæ ſecantium cum ſinu toto HF. DG. Dico maiorem eſſe rationem AF. ad DG. quam AH. ad AD. diuiſa AI. bifariam in E. centro. E. deſcribatur circulus ABCI. ſecans ſecantes in punctis B. C. & ducantur rectæ AG. AF. AB. AC. Quoniam

niam in triangulis IAH. IAD. rectus eſt angulus ad A. ma-
iorq; angulus ADI. externus, interno DAI. minor erit ratio 16.1.
AD. ad DI. quam AH. ad HI. & conuertendo maior ratio 23. huius.
ID. ad DA. quam IH. ad HA. ſed vt ID. ad DA. ita DA. 8.6.
ad DB. & vt IH. ad HA. ita HA. ad HC. (nam cum rectan- 36.3.
gulum IDB. ſit æquale quadrato DA. & rectangulum IHC.
Quadrato. HA. erit vt ID. ad DA. ita DA. ad DB. & vt 17.6.
IH. ad HA. ita HA. ad HC.) Igitur maior eſt ratio AD. ad
DB. quam AH. ad HC. & permutando, & conuertendo, mi-
nor ratio AH. ad AD. quam HC. ad DB. Rurſus cum in
triangulo rectangulo IAD. demiſſa ſit ad baſim ID. perpen- 31.3.
dicularis AB. & lateri IA. ſit ſumpta in baſi æqualis IG. di-
uidet, ex præcedenti, recta AG. angulum DAB. bifariam, 37. huius.
atq; eodem modo in triangulo rectangulo IAD. recta AF. di-
uidet angulum HAC. bifariam. Quare cum in triangulis re-
ctangulis ABD. ACH. angulus CAH. ſit maior angulo BAD. 23. huius.
maior erit ratio BA. ad AD. quam CA. ad AH. ſed vt BA. 3.6.
ad AD. ita BG. ad GD. & vt CA. ad AH. ita CF. ad FH.
(nam angulos BAD. CAH. rectæ AG. AF. bifariam diuidunt)
igitur maior ratio BG. ad GD. quam CF. ad F. H. & com-
ponendo, & permutando maior ratio BD. ad CH. quam DG.
ad FH. & conuertendo, minor ratio HC. ad DB. quam FH. ad DG. Cum igitur minor ſit ratio AH. ad AD. quam HC. ad DB. vt paulo ante oſtenſum eſt, item minor ratio HC. ad



DB. quam FH. ad DG. erit etiam ex æqualitate, minor ratio
AH. ad AD. quam FH. ad DG. Quod erat demonſtrandum.

COROL-

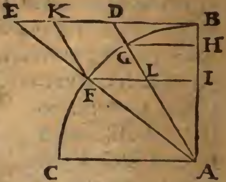
COROLLARIVM.

Ex dictis colligitur, etiam differentiæ ſecantis maioris arcus in ſemicirculo, ad differentiam ſecantis minoris, maiorem eſſe rationem, quam tangentis, arcus maioris, ad tangentem minoris; oſtenſum enim eſt maiorem eſſe rationem CH. ad BD. quam HA. ad DA.

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XLII.

Differentia ſecantis maioris arcus, cum ſinu toto, ad differentiam ſecantis minoris, maiorem habet rationem, quam ſinus verſus maioris arcus, ad ſinum verſum minoris.

IN ſuperiori figura, ſint rurſus ſecantes AE. AD. illa maioris arcus BF. iſta minoris BG. earum differentiæ EF. DG. & ductis ſinibus rectis GH. FI. quorum iſte ſecet AD. in L. ſint eorundem arcuum ſinus verſi IB. HB. Dico maiorem eſſe rationem FE. ad GD. quã IB. ad HB. Ducatur enim KF. parallella ipſi DA. Erit angulus FKE. æqualis angulo ADE. angulus autem ADE. eſt obtuſus (cum enim in tri-



29. 1. [margin note beside "IB. ad HB. Ducatur enim KF."]

31. 1. angulo rectangulo angulus ABD. ſit rectus, erit ADB. acutus,
13. 1. ac proinde eius complementum ADE. obtuſus) igitur etiam
19. 1. angulus FKE. obtuſus eſt; maius igitur eſt latus EF. latere
2. 6. FK. in triangulo FKE. Rurſus cum parallelæ ſint lateri BD. rectæ IL. HG. in triangulo ABD. erit vt HI. ad HA. ita GL. ad GA. & vt HA. ad HB. ita GA. ad GD. ergo ex æquali vt
34. 1. HI. ad HB. ita GL. ad GD. & componendo vt IB. ad BH. ita LD. id eſt FK. illi æqualis (eſt enim KDLF. parallelogrammum ex deſcriptione) ad GD. Sed maior oſtenſa eſt FE. quam

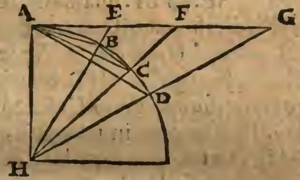
FK.

FK. igitur maior ratio eſt FE. ad DG. quam FK. id eſt, LD. ad DG. & IB. ad HB. Quod demonſtrandum erat. 8.1.

THEOREMA XL. PROPOS. XLIII.

ARcuum continuorum in circulo ſeſe ęquali exceſſu ſuperantium, chordæ inter ſe, ſinus item recti, ſunt in continua proportione minori; ſecantes vero in continua proportione maiori.

IN circulo ABCD. cuius centrum H. & diameter HA. ſint tres arcus æqualiter differentes, ac continui AB. AC. AD. quorum chordę AB. AC. AD. & ſecantes HE. HF. HG. Dico primo minorem eſſe rationem chordæ AD. ad chordam AC. quam chordæ AC. ad chordam AB. In triangulis enim BAC. CAD. æquales ſunt anguli BAC. CAD. æqualibus arcubus BC. CD. inſiſtentes: Angulus vero CDA. maiori arcui CA. inſiſtens erit maior angulo BCA. minori arcui BA. inſiſtente. minor igitur eſt angulus DCA. angulo CEA. Ergo minor eſt ratio BA. ad AC. quam CA. ad AD. vt conſtat ex 25. huius. 27. 3. ſchol. 27. 3. per 32. 1. 25. huius.



Rurſus quoniam ſinus recti dimidij ſunt chordarum, ſint autem chordæ in continua proportione minori, erunt etiam ſinus recti in continua proportione minori. 15. 5.

Denique dico maiorem eſſe rationem ſecantis HA. ad ſecantem HE. quam ſecantis HE. ad ſecantem HF. nam cum in triangulis AHE. EHF. æquales ſint anguli AHE. EHF. maior autem ſit angulus AEH. externus, interno HFE. maior erit ratio AH. ad HE. quam HE. ad HF. Atq; eodem modo oſtendetur maiorem eſſe rationem HE. ad HF. quam HF. ad HG. Quod erat oſtendendum. coroll. 25. huius.

THEO-

THEOREMA XLI. PROPOS. LXIV.

TAngentium differentiæ quibus æquales arcus continui reſpondent, ſunt in continua proportione maiori.

IN figura ſuperioris propoſitionis, ſint tres, aut plures arcus AB. BC. CD. æquales, ac continui; & tangentium differentiæ illis reſpondentes AE. EF. FG. Dico maiorem eſſe rationem AE. ad EF. quam EF. ad FG. Nam quoniam angulus AHF. diuiſus eſt bifariam recta HE. ob arcus AB. BC. æquales, erit vt AH. ad HF. ita AE. ad EF. Atq; eodem modo cum
3.6. diuiſus ſit angulus EHG. bifariam recta HF. ob æquales arcus qui aſſumpti ſunt BC. CD. erit vt EH. ad HG. ita EF. ad FG. Rurſus quia in triangulis AHF. EHG. quorum anguli
16.1. AHF. EHG. ſunt æquales, ex hypotheſi, & angulus HFA.
25. huius. minor angulo HGE. maior erit ratio AH. ad HF. quam EH. ad HG. ſed vt AH. ad HF. ita oſtenſum eſt AE. ad EF. & vt EH. ad HG. ita EF. ad FG. Igitur maior eſt ratio AE. ad EF. quam EF. ad FG. Quod erat demonſtrandum.

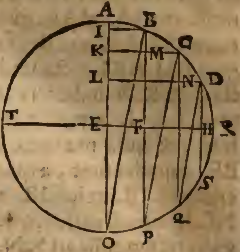
THEOREMA XLII. PROPOS. XLV.

SInuum verſorum, ac rectorum differentiæ æqualibus arcubus continuis ſubtenſæ, ſunt in continua proportione minori.

IN circulo ABC. cuius centrum E. duæ diametri ſeſe perpendiculariter ſecent in E. quæ ſint AO. TR. & ſumantur quotlibet arcus æquales ac continui AB. BC. CD. ſintque arcuum AB. AC. AD. ſinus recti BI. CK. DL. & ſinus complementorum BF. CG. DH. producti in peripheriæ puncta O. P. Q. S. & qui ſecent ſinus in M N. & connectantur OB. PC. QD. erunt EF. FG. GH. ſinuum verſorum differentiæ. Dico minorem

rem eſſe rationem EF. ad FG. quam FG. ad GH. Quoniam in triangulis rectangulis ad OIB. PMC. QND. æquales ſunt etiam anguli IOB. MPC. NQD. æqualibus arcubus AB. BC. CD. inſiſtentes æquiangula ſunt triangula dicta inter ſe, erit ergo vt OB. ad BI. ita PC. ad CM. & QD. ad DN. & permutando, vt OB. ad PC. ita IB. ad MC. id eſt EF. ad FG. & vt PC. ad QD. ita MC. ad ND. id eſt FG. ad GH. Quoniam vero arcus BRO. CRP. DRQ. ſeſe æquali exceſſu ſuperant, æquales enim ſumpti ſunt arcus AB. BC. CD. tum inter ſe, tum arcubus OP. PQ. QS. minor erit ratio chordæ OB. ad chordam PC. quam chordæ PC. ad chordam QD. Igitur & rectæ EF. FG. GH. quæ eandem rationem cum dictis chordis obtinent, ita ſe habebunt, vt minor ſit ratio EF. ad FG. quam FG. ad GH. Quod fuit probandum.

27. 3.
32. 1.
4 6.
43. huius.

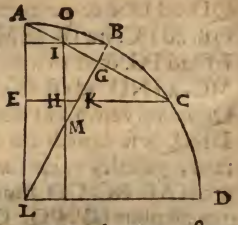


PROBLEMA IIII. PROPOS. XXXXVI.

QVadrantem ita ſecare, vt ſinus verſus maioris arcus, ad ſinum verſum minoris, maiorem habeat rationem, quam tangens maioris, ad tangentem minoris.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum L. latera perpendicularia LA. LD. quorum vnum LA. ita ſecetur, vt pars LE. ſit aut æqualis, aut maior quam EA. & ducatur EC. perpendicularis ad LA. & arcus CA. quem EC. abſcindit ex quadrante, diuidatur biſariam in B. ducaturque arcus BA. ſinus rectus BR. & connectatur chorda AC. ſecans BR. in I. Item ſemidiameter L. B. ſecans CE. in K. & CA. in S. denique per I. ipſi AL. agatur parallela IM. ſecans CE. in H. & LB. in M.

& DL. in N. Conſtat EA. eſſe ſinum verſum arcus CA. & RA. ſinum verſum arcus BA. Item CE. eſſe tangentem anguli CLE. ideſt arcus CA. & KE. tangentem anguli KLE. ſeu arcus BA. Poſito nimirum ſinu toto LE. Dico maiorem eſſe rationem EA. ad AR. quam CE. ad EK. Nam æqualium arcuum CB. BA. æquales ſunt ſinus verſi BS. AR. Igitur triangula BSI. ARI. rectangula ad puncta S. & R. & habentia angulos ad

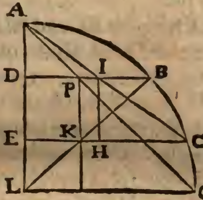


15. 1. verticem. I. æquales, æquiangula
32. 1. ſunt, & quia præterea latera AR.
26. 1. BS. æqualia ſunt, æqualia etiam
34. 1. erunt SI. IR. at ipſi IR. æqualis eſt NL. Igitur, cũ rurſus in duobus triãgulis rectangulis ad S. N. etiam anguli ad verticem M. ſint æquales, & æqualia latera NL. SI. eodem modo, quo paulo ante oſtendemus in dictis triangulis latus SM. lateri MN. & baſim IM.
19. 1. baſi ML. eſſe æqualem, maior autem ML. quam MN. Igitur maior eſt IM. quam MN. ac proinde NM. minor quam dimidia ipſius NI. at LE. aut dimidia eſt, aut maior quam dimi-
15. 3. dia ipſius LA. quæ multo maior eſt quam NI. Igitur maior
34. 1. eſt LE. id eſt HN. quam MN. cadet igitur punctum M. inter puncta H. N. ac LM. producta ſecabit CE. in K. inter puncta C. H.; maior igitur eſt EK. quam EH. Rurſum cum in triangulo CEA. recta IH. ſit parallella lateri AE. & IR. ipſi HE. ex
2. & 4. 6. deſcriptione erit vt CE. ad EH. id eſt CA. ad IA. ita EA. ſinus verſus arcus CA. ad RA. ſinum verſum arcus BA. ſed CE. tangens anguli CLE. ad KE. tangentem anguli KLE. mino-
8. 5. rem habet rationem quam CE. ad EH. Igitur CE. tangens
13. 5. anguli CLE. ſeu arcus CA. ad KE. tangentem anguli KLE. ſeu arcus BA. minorem habet rationem, quam EA. ſinus verſus arcus CA. ad RA. ſinum verſum arcus BA. Quod erat, &c.

PROBLEMA V. PROPOS. XXXXVII.

DAto arcu in Quadrante, alium inuenire, ita vt tangens maioris ad tangentem minoris, maiorem habeat rationem, quam ſinus verſus maioris, ad ſinum verſum minoris.

SINVM DB. arcus AB. vtcunque acceptum ſecet chorda quadrantis AO. in P. ex quo puncto P. ipſi AL. parallela PK. ducta ſecet ſemidiametrum LB. in puncto K; & ad AL. ducatur perpendicularis EKC. Dico maiorem eſſe rationem tangentis arcus AC. ad tangentem arcus AB. quam ſinus verſi eiuſdem arcus AC. ad ſinum verſum arcus AB. Ducatur AC. ſecans DB. in I. & ex I. ipſi PK. ſeu AE. parallela agatur IH. ſecans

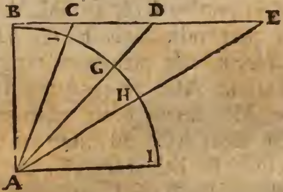


EC. in H. quod quidem punctum I. cadet inter P. & B. cum punctum C. cadat ſupra O. ideoque recta AC. ſupra AO, & punctum H. cadet inter puncta K. & C. erit EA. ſinus verſus arcus AC. & DA. ſinus verſus arcus AB. & CE. tangens anguli ELC. id eſt arcus AC. & EK. tangens anguli ELK. id eſt, arcus AB. Cum igitur parallelæ ſint IH. AE. Item etiam DI. & EH. erit vt CE. ad EH. id eſt CA. ad AI. ita EA. ad AD. ſed CE. ad EH. minorem habet rationem
quam CE. ad EK. Igitur EA. ſinus verſus arcus AC. ad DA. 2. & 4. 6. 8. 5.
ſinum verſum arcus AB. minorem habet rationem, quam CE. tangens anguli ELC. ſeu arcus AC. ad EK. tangentem anguli ELK. ſeu arcus AB. Quod fuit probandum.

PROBLEMA VI. PROPOS. XXXXVIII.

QVadrantem ita ſecare, vt ſecans arcus maioris, ad ſecantem minoris, maiorem habeat rationem, quam arcus maior, ad arcum minorem.

QVADRANS ABI. diuidatur bifariam in G. & arcus G. B. rurſus bifariam in F, & ducatur tangens infinita BE. ac per puncta GF. ſecantes AC. AD. fiatq; vt BC. ad BD. ita ſecans AD. ad aliam quampiam, quæ transferatur ex A. in E. ita vt AE. ſecans arcus BH. quartæ proportionali ſit æqualis. Dico maiorem eſſe rationem ſecantis AE. ad ſecantem AD, quam arcus HB. ad arcum BG. maiorem autem



14.5. eſſe AE. quam AD. & ideo arcum HB. quam GB. conſtat quia
26. huius. BD. maior eſt quam BC. quare cum maior ſit ratio tangentis DB. ad tangentem BC. quam arcus GB. ad arcum BF. maior etiam erit ratio ſecantis AE. ad ſecantem AD, quam arcus
13.5. 15.5. GB. ad arcum BF. ſed vt arcus GB. ad BF. arcum, ita arcus IB. ad arcum GB. vtrobique enim maior minoris duplus eſt,
8.5. & IB. ad BG. maiorem habet rationem quam HB. ad BG. ergo ſecans AE. ad ſecantem AD. maiorem habet rationem quam arcus HB. ad arcum BG. Igitur Quadrantem ità ſecauimus, vt ſecans arcus maioris, &c. Quod erat faciendum.

THEOREMA XLIII. PROPOS. XLIX.

SI ex puncto diametri productæ extra circulum rectæ ducantur, quæ in conuexam, & cauam

peri-

peripheriam incidentes ſemicirculum ſecent, tam ſecantis maioris ad minorem, quam incidentium in conuexam peripheriam maioris ad minorem, minor eſt ratio, quam maioris arcus ex ijs quos abſcindunt, ac ſubtendunt ad minorem.

SIT circulus CDE. in cuius diametro extra circulum producta, ſumatur punctum A. a quo in ſemicirculum CB. ducantur quotlibet rectæ AD. AE. quæ cõuexam peripheriam ſecent in pũctis F. G. concauam in D. E. Dico minorem eſſe rationem AD. ad AE. item AG. ad AF. quam arcus DEF. ad arcum EG. Nam quoniam rectangulum DAF. æquale eſt rectangulo EAG. erit vt DA. ad EA. ita AG. ad AF. Ruſus quoniam chordæ minori EG. additur recta GA. & maiori DF. additur recta FA. minor quam GA. minor erit proportio DA. ad EA. quàm chordæ DF. ad chordam EG. ſed chorda DF. ad chordam EG. minorem habet rationem quam arcus DEF. ad arcum EG. Igitur DA. ad EA. minorem habet rationem, quam arcus DEF. ad arcum EG. Igitur DA. ad EA. minorem habet rationem quam arcus DEF. ad arcum EG. ſed vt DA. ad EA. ita oſtenſum eſt eſſe AG. ad AF. Igitur minor eſt ratio AG. ad AF. quam arcus DEF. ad arcum EG. Igitur ſi ex puncto, &c. Quod erat oſtendendum.



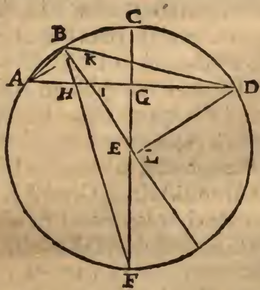
36. 3.
14. 6.
1. huius.
Corol. 2. 28. huius.
13. 5.

THEOREMA XXXXIV. PROPOS. L.

SI à centro, atque ab extremitate diametri circuli, duæ rectæ ducantur ad idem circumferentiæ

tiæ punctum, quæ chordam, & arcum, cui ſubtenditur, in partes inæquales diuidant: arcus maior, ad minorem maiorem habet rationem, quam ſegmentum chordæ maius, ad minus.

SIT circulus ABC. cuius centrum E. diameter FC. ab E. & F. ducantur duæ rectæ FB. EB. ad idem circumferentiæ punctum B. quæ chordam quampiam AD. ſecent in partes inæquales recta quidem FB. in H. & EB. in I. Item arcum DA. in maiorem DB. minorem BA. Dico minorem eſſe rationem DH. ad HA. itemque minorem rationem DI. ad IA. quam arcus DB. ad arcum BA. Ex A. & D. ducantur perpendiculares ad EB. rectæ DL. AK. erunt hæ rectæ ſinus arcuum BD. BA. Item ex E. ad AD. perpendicularis EG. ſecans tã chordam AD. quam arcum ACD. & AFD. bifariam in G. C. & F. manifeſtum eſt, cum arcus DB. maior ſit quam arcus BA. ideoque maior dimidio totius DA. quod punctun B. cadet inter A. & C. ideoque puncta I. & H. inter puncta G. & A. Quare ſegmentum DI. maius eſt ſegmento IA. & DH. maius quam HA. Quoniam æquiangula ſunt triangula rectangula DLI. AKI. ob æquales angulos ad verticem I. erit vt DI. ad IA. ita DL. ſinus rectus arcus BD. ad AK. ſinum rectum arcus AB. ſed DL. ad AK. minorem habet rationem quam arcus DB. ad arcum BA. Igitur ſegmentum DI. ad ſegmentum IA. minorem habet rationem quam arcus DB. ad arcum BA. Rurſus cum duo anguli ABH. DBF. inſiſtant arcubus æqualibus AF. DF. ideoque ſint æquales, erit vt DH. ad HA. ita chorda DB. ad chordam BA. at chorda DB. ad chordam BA. minorem habet rationem, quam arcus



ſchol. 27. 3. & 3. 3.

32. 1.

15. 1.
4. 6.
coroll. 1. 28. huius.

27. 3.
2. 6.
coroll. 2. 28. huius.

arcus DB. ad arcum BA. Igitur DH. ad HE. minorem habet rationem, quam arcus DB. ad arcum BA. Quod erat, &c.

COROLLARIVM I.

Hinc patet ſi angulus quem duæ ſubtenſæ efficiunt, recta ab externitate diametri ducta diuidatur, bifariam etiam diuidi; nam probatum eſt angulum ABD. bifariam ſecari, à recta FB.

COROLLARIVM II.

Conſtat etiam, ſi in chordam recta ex centro ducatur, quæ chordam, & arcum ſubtenſum diuidat; habere ſegmenta chordæ proportionem eandem, quam ſinus arcuum; Nam demonſtratum eſt, eſſe, vt DI. ad IA; ita DL. ſinum arcus DB. ad AK. ſinum arcus AB.

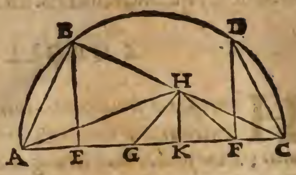
THEOREMA XLV. PROPOS. LI.

SI à puncto in quo diameter circulum ſecat, ex ipſa diametro dematur duplum ſinus recti arcus Quadrante minoris, & ex termino lineæ abſciſſæ alius ſinus rectus ducatur: arcuum inter ſinus, & extremam diametrum interceptorum maior eſt ratio, quam dupli ſinus ad ſinum; minor autem quam dupli ſinus recti, ad ſinum verſum arcus minoris.

IN ſemicirculo ABC. ſumatur arcus AB. à puncto A. in quo diameter AC. circulum ſecat, Quadrante minor, & ducto ſinu recto BE. ipſius BE. à puncto A. ſumatur dupla AF. & ex puncto F. ducatur FD. ſinus rectus arcus DA. Dico maiorem eſſe rationem arcus DA. ad arcum BA. quam rectæ FA. ad

ſinum

ſinum BE. minorem autem quam FA. ſinum verſum arcus DA. ad AE. ſinum verſum arcus AB. connectantur AB. CD. BC. & in chorda BC. ſumatur BH. æqualis ipſi BA. & AE. æqualis EG. & ex H. ducatur ad diame-



31. 3. trum AC. perpendicularis HK. & connectantur HA. HG. HF. BD. Quoniam angulus ABH. in ſemicirculo rectus eſt, & rectus etiam HKA. ex hy-

coroll.22.3. potheſi, erunt puncta A. B. H. K. in circulo. Igitur anguli

21. 3. BHA. BKA. in eodem ſegmento exiſtentes æquales ſunt, ſed BHA. eſt ſemirectus (nam ſumpta ſunt duo latera BA. BH.

5. 1. æqualia igitur equales anguli BAH. BHA. & ſemirecti cum

32. 1. ABC. in ſemicirculo ſit rectus.) Igitur BKA. eſt ſemirectus, ac

6. 1. proinde cum rectus ſit angulus KEB. ſemirectns eſt KBE. æqualia igitur ſunt latera EK. EB. cum igitur AF. ſit dupla ipſius BE. ex hypotheſi, id eſt, ipſius EK. erit reliquum AE. KF. æquale ipſi EK. Si igitur æqualia demantur AE. EG. remanebunt GK. KF. æquales. Cum igitur duo triangula HKG. HKF. habeant duo latera HKG. HKF. circa angulos rectos

4. 1. æqualia, habebunt & angulos HGK. HFK. æquales, ideo-

17. 3. que complementa HGA. HFC. æqualia. Item quia CAE. re-

8. & 4. 6. ctangulum æquale eſt Quadrato AB. (eſt enim vt CA. ad BA. ita BA. ad AE. ideoque proportionales ſunt CA. BA. AE.),

1. 6. & AG. eſt dupla ipſius AE. ex hypotheſi erit rectangulum

47. 1. CAG. duplum Quadrati AB. ſed AH. eſt duplum Quadrati AB. cum ſit æquale Quadratis rectarum AB. BH. quæ ponuntur

6. 6. æquales; igitur rectangulum CAG. æquale eſt Quadrato

17. 6. AH. Quare vt CA. ad AH. ita AH. ad AG. æquiangula igitur ſunt triangula CAH. HAG. Igitur angulus AHG. angulo HCA. eſt æqualis. Cum vero oſtenſi ſint æquales anguli

32. 1. HFC. HGA erunt reliqui anguli HAG. CHF. æquales, æqui-

26. 1. angulum igitur eſt triangulum HFC. triangulo HAG. ſed

trian-

triangulo HAG. oſtenſum eſt triangulum CAH. eſſe æqui-
angulum, æquiangula igitur ſunt triangula ACH. HCF. 4. 6.
Igitur vt AC. ad CH. ita CH. ad CF. æquale igitur actu 17. 6.
Quadratum HC. rectangulo ACF. ſed etiam rectangulum 8.& 17.6.
ACF. æquale eſt Quadrato CD. æqualia igitur ſunt Qua-
drata HC. DC. æquales igitur ſunt rectæ HC. DC. Quare
cum recta BH. ſit ſumpta æqualis ipſi BA. & HC. oſtenſa ſit
æqualis ipſi CD. erit tota BC. æqualis duabus ſimul DC.
BA. ſed CD. DB. maiores ſunt quam CB. Igitur ſunt etiam 20. 1.
maiores quam CD. B .demptæ igitur communi CD. rema-
nebit DB. maior quam BA. Igitur arcus DA. maior eſt
quam vt ſit duplex arcus BA. dupla antem eſt FA. ipſius
EB. maior igitur ratio eſt arcus DA. ad arcum AB. quam
rectæ FA. . ad rectam EB. Rurſus quoniam arcus BA. eſt
Quadrante minor maior erit ratio FA. ſinus verſi arcus
DA. ad AF. ſinum verſum arcus BA. quam DA. ad BA.

FINIS LIBRI I.

CVRVI AC RECTI Proportio promota.

LIBER SECVNDVS.

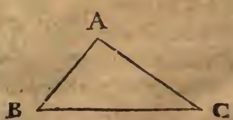
THEOREMA I. PROPOS. I.

IN omni triangulo angulorum inæqualium, maior eſt ratio anguli maioris ad minorem, quam lateris oppoſiti maiori angulo, ad latus oppoſitum minori.

IN triangulo ABC. ſit angulus B. maior angulo C. Dico angulum B. ad angulum C. maiorem habere rationem, quam latus AC. ád latus AB. Nam ea eſt proportio lateris AC. ad latus AB. quæ eſt ſinus recti anguli B. ad ſinum rectum anguli C. At ſinus rectus anguli B. ad ſinum rectum anguli C. minorem habet rationem, quam angulus B. ad angulum C. Igitur latus AC. ad latus AB. minorem habet rationem quam angulus B. ad angulum C. ideoque maior eſt ratio anguli B. ad angulum C. quam AC. ad AB. Quod oſtendere oportebat.

Clauius p. 1. de triangulis rectil.

coroll. 1. 28. 1. huius.

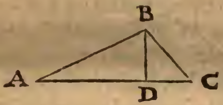


THEO-

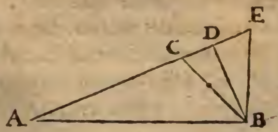
THEOREMA II. PROPOS. II.

SI ex trianguli angulo, in baſim perpendicularis demittatur, ex angulis quos cum lateribus facit, maior ad minorem, minorem habet rationem, quam, aut maius ſegmentum baſis ad minus, aut compoſita ex baſi, & aſſumpta inter perpendicularem, & baſim, ad ipſam aſſumptam.

SIT triangulum quodcumque ABC. ex cuius angulo B.in baſim AC. perpendicularis demittatur AD. quæ cadat primo intra triangulum, faciatque cum lateribus angulus ABD.CBD. ſitq; ABD. maior, DBC. minor. Dico maiorem eſſe rationem AD. ad DC. quam anguli ABD. ad angulum DBC. Vt enim AD. ad DC. ita tangens anguli ABD. ad tangentem anguli DBC. at tangens anguli maioris ABD. ad tangentem minoris DBC. maiorem habet rationem, quam angulus maior ad minorem; Igitur AD. ad DC. maiorem habet rationem, quam angulus ABD.ad angulum DBC. 26.1.huius.



Sit ſecundo triangulum ABC. obtuſangulum ad C. & ſtatuatur AC.baſis, in quam productam cadat perpendicularis BD. Dico maiorem eſſe rationem AD. ad DC. quam anguli DBA. ad angulum CBD. Sumatur enim ipſi DC. æqualis DE. & connectatur DE. Quoniam duo triangula circa angulos rectos ad D.habent latera BD. DC.æqualia lateribus BD.DE. æquiangula erunt, & angulus EBD. erit æqualis angulo DBC. Cum igitur AD. ſit

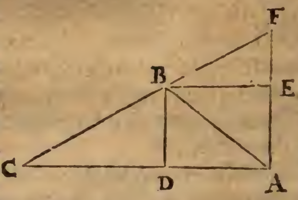


tangens anguli DBA. & DE. tangens anguli DBE. maior erit proportio AD. ad DE. ideſt DC. quam anguli ABD. ad angulum EBD. ideſt CBD. Quod ſecundo oſtendendum erat.

THEOREMA III. PROPOS. III.

SI ex trianguli angulo, in baſim perpendicularis demitatur, reliquorum angulorum maior ad minorem minorem habet rationem, quam maius ſegmentum ad minus.

SIT triangulum ABC. in quo ab angulo ABC. perpendicularis demittatur BD. quæ cadat intra triangulum, in baſim AC. ſitque angulus BAC. maior angulo BCA. Dico minorem eſſe rationem anguli BAC. ad angulum BCA. quam CD. maioris ſegmenti ad DA. minus. Ducatur AF. parallela ipſi BD. quæ occurrat protractæ CB. in F. & ipſi AC. ſit parallela BE. erit AE. tangens anguli EBA. id
4. & 34. 1. eſt anguli BAC. & EF. tan-
29. 1. gens anguli FBE. id eſt anguli BCA. (poſito nimirum eodem ſinu toto BE.) Et AE.



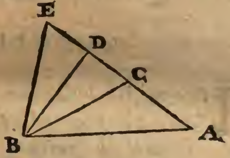
quidem maior erit quam EF. cum angulus BAC. id eſt,
29. 1. EBA. ponatur maior, quam angulus BCA. i d eſt, EBF.
26. 1. huius. igitur maior eſt ratio AE. ad EF. id eſt, CB. ad BF. id eſt,
2. 6. CD. ad DA. quam anguli BAC. ad angulum BCA. Quod probandum erat.

THEO-

THEOREMA IIII. PROPOS. IIII.

SI in trianguli obtuſanguli latus ex angulo acuto demiſſa perpendicularis cadat extra triangulum, ſitque anguli obtuſi complementum maius reliquo angulo: maior erit ratio lateris, in quod cadit perpendicularis, cum aſſumpta inter latus & perpendicularem, ad aſſumptam; quam anguli complementi, ad reliquum angulum.

SIT triangulum ABC. obtuſangulum ad C. & in protractum latus AE. cadat perpendicularis BD. & ſumatur DE. æqualis DC. ac connectatur BE. Dico maiorem eſſe rationem AD. ad DC. quam anguli BCD. qui complementum eſt obtuſi ad angulum reliquum BAC. Rurſus enim BED. BCD. anguli ſunt æquales, ob latera BD. DE. æqualia lateribus BD. DC. circa angulum rectum. Igitur, ex præcedenti, maior erit ratio AD. ad DE. id eſt, DC. quàm anguli BEA. id eſt, BCD. ad reliquum angulum BAC.



4. 1.
3. 2. huius.

THEOREMA V. PROPOS. V.

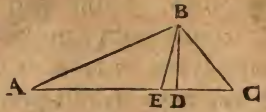
SI trianguli angulum inæqualibus lateribus contentum, bifariam diuidens recta in baſim intra triangulum cadat; ſegmentum maius ad minus, minorem habet rationem, quam reliquorum angulorum maior ad minorem.

SIT

EX trianguli ABC. angulo ABC. duobus inæqualibus lateribus AB.maiori BC.minori contento,in baſim AC. cadat recta BE. quæ angulum ABC. bifariam ſecet, & baſim

3. 6. AC. in E. Cum ſit vt AB.latus maius ad BC. minus,ita AE. ad EC. erit AE. maius ſegmentum, EC. minus, &

18. 1. angulus C.maior, A. minor. Dico minorem eſſe rationem



3. 6. AE. ad EC. quam anguli C. ad angulum A. Vt enim AE.

1.2.huius. ad EC.ita AB. ad BC. Sed AB. ad BC. minorem habet rationem quam angulus C. ad angulum A. Igitur AE. ad EC. minorem habet rationem quam angulus C. ad angulum A. Quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc conſtat ſi ducatur ad baſim AC. perpendicularis AD. punctum E. cadere in maius ſegmentum AD.

3.2. hujus. *nam ſi caderet in punctum D. aut inter D. & C. maior eſſet proportio AE. ad EC. quàm anguli C. ad angulum A. quod eſt contra paulo ante demonſtrata.*

COROLLARIVM II.

Colligitur etiam baſim AC. in puncto inter E. D. diuidi poſſe, ita vt eadem ſit ratio anguli C. ad angulum A. quæ ſegmenti maioris ad minus. Non enim in D. aut puncto intra D. & C. nam ibi ſemper minor eſt ratio anguli maioris ad angulum minorem, quam ſegmenti maioris, ad minus, neque in E. aut puncto inter A. & E. nam illic maior eſt ratio anguli maioris, ad minorem, quam ſegmenti maioris, ad minus.

COROL-

COROLLARIVM III.

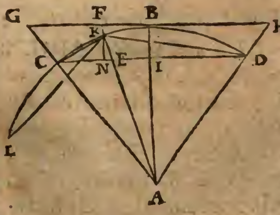
H*Inc etiam efficitur ſi in triangulo, recta ex angulo in baſim protractam extra triangulum ducta, efficiat cum viciniori latere angulum, dicto angulo æqualem; maiorem eſſe rationem maioris anguli adiacentis, ad minorem quam baſis, ad intereptam inter baſim, & rectam ex angulo ductam. Si enim ſit triangulum AEB. in cuius baſim AE. protractam, ducatur BC. faciens angulum EBC. angulo EBA. æqualem. minor erit ratio AE. ad EC. quam anguli C. ad angulum A. ſed anguli C. ad angulum A. minor eſt ratio quam anguli AEB. ad eundem angulum A. minor enim eſt C. internus externo AEB. Igitur minor eſt ratio AE. ad EC. quam anguli AEB. ad angulum A.* 8. 5. 16. 1.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

14. 6.

SI ex trianguli Iſoſcelis angulo, recta in baſim demiſſa, eam in partes inæquales diuidat; minor erit ratio maioris ſegmenti ad minus, quam anguli maiori ſegmento oppoſiti, ad oppoſitum minori.

EX trianguli AGH. æqualium angulorum ad G. & H. angulo A. ducatur in baſim GH. recta AF. ſecans eam in partes inæquales HF. maiorem FG. minorem. Dico minorem eſſe rationem HF. ad FG. quam anguli HAF. ad angulum FAG. Ducatur ex puncto A. in GH. perpendicularis AB. & diſtantia AB. centro A. deſcribatur, circulus ſecans AH. AF. AC. in punctis DKC. & connectatur DC. KD. & ipſi



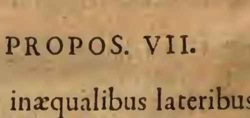
KD.

KD. chordę, ſumatur æqualis KL. diuidaturque angulus
LKD.bifariam recta AKF.& angulus CKD. bifariam recta
Schol.27.3. FN. cum angulus DKC. maior ſit angulo DKL. erit,& eius
medietas DKN. maior medietate DKE. linea igitur KN.
cadet inter E. & C. in N. erit igitur CN. minor quam CE.
Quare maior erit proportio DN.ad NC. quam DE.ad EC.
3. 6. Sed vt DN.ad NC. ita DK.ad KC. maior igitur ratio eſt
Corol.2.28. DK. ad KC. quam DE. ad EK. eſt autem etiam maior ratio
1.huius. arcus DK. ad arcum KC. quam chordę DK. ad chordam
KC. Igitur multo maior ratio erit arcus DK.ad arcum KC.
Schol.27.3. quam DE.ad EC.id eſt quam HF.ad FG. (Nam recta AB.
3. 3. arcum CD. bifariam ſecans ſecat CD. bifariam, quare &
ad angulos rectos in I. ſed & recti ſunt poſiti anguli ad B.
parallelæ igitur ſunt CD. GH. igitur vt DE. ad EC.
Schol.4. 6. ita HF. ad FG.) Quare ſi ex trianguli Iſoſcelis angulo, &c.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI ex angulo trianguli inæqualibus lateribus contento in oppoſitam baſim demiſſa perpendicularis intra triangulum cadat, & alia in maius ſegmentum ex eodem angulo ducatur: recta inter ductam, & angulum minorem contenta, ad reliquam partem baſis, maiorem habet rationem, quam angulus oppoſitus, ad reliquum angulum.

SIT triangulum AHG. cuius latus AH. minus AG. maius, baſis HG. in quam ca-
Schol.47.1. dat perpendicularis AB. quæ baſim diuidet in duo ſegmenta maius BG. minus BH. & in maius ex A. ducatur recta AF. Dico maiorem eſſe ratio-



nem

nem GF. ad FH. quam anguli GAF. ad angulum FAH. Quoniam minor eſt HB. tangens anguli HAB. quam BG. tangens anguli BAG. minor erit ratio HB. ad BG. quam anguli HAB. ad angulum BAG. & componendo, minor ratio HG. ad GB. quam HAG. ad BAG. ſed BG. ad GF. minor eſt ratio quam BAG. ad FAG. (cum enim maior ſit ratio tangentis maioris GB. ad minorem BF. quam anguli BAG. ad angulum BAF. erit per conuerſionem rationis minor ratio BG. ad GF. quam BAG. ad FAG.) Igitur ex æquali minor eſt ratio HF. ad FG. quam HAF. ad FAG. & conuertendo maior ratio GF. ad FH. quam anguli GAF. ad angulum FAH. Quod erat &c.

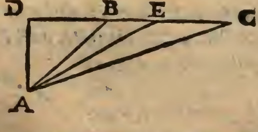
26. 1. huius.

26. 1. huius.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

IN omni triangulo amblygonio, ſi ex angulo acuto in latus protractum, perpendicularis ducatur, & ex eodem angulo oppoſitum latus recta ſecetur; ſegmentum vicinius perpendiculari, ad remotius, minorem habet rationem, quam angulus oppoſitus, ad oppoſitum.

SIT triangulum ABC. amblygonium ad B. in cuius latus protractum CB. ex angulo acuto A. perpendicularis ducatur AD. & ducatur AE. ſecans BC. vtcumque. Dico minorem eſſe rationem ſegmenti BE. vicinioris ipſi AD. ad EC. remotius quam anguli BAE. ad angulum EAC.



ſunt enim BE. EC. differentiæ tangentium CD. ED. BD. eſtque EC. remotior à puncto contactus D. quam BE. Igitur minor eſt ratio BE. ad EC. quam anguli BAE. ad angulum EAC. Quod erat probandum.

27. 1. huius.

COROLLARIVM.

EOdem modo oſtenditur ſi ex trianguli rectanguli angulo acuto, recta in oppoſitum latus ducatur; minorem eſſe rationem ſegmenti vicinioris perpendiculari, ad remotius quam anguli oppoſiti viciniori ſegmento, ad oppoſitum remotiori. In triangulo enim rectangulo ADE. Ducta vtcumque AB. minor eſt ratio DB. ad BE. quam anguli DAB. ad angulum BAE.

SCHOLIVM.

APpoſuimus in propoſitione ſeptima huius hanc conditionem, vt ducta AF. cadat in maius ſegmentum BG. quia ſi caderet in minus HB. poſſet contingere vt proportio HF. ad FG. modo eſſet minor, modo maior, quam anguli oppoſiti ad oppoſitum. Ducatur enim in minus ſegmentum HB. recta AF. ſecans arcum KB. bifariam in L. & rectæ HF. accipiatur æqualis FI. IM. MG. & arcus BN. NO. ſint æquales ipſis KL. LB. Erit HF. maior quam FB. maior enim eſt ratio HF. ad FB. quam KL. ad LB. æqualis autem eſt KL. ipſi LB. igitur maior eſt HF. quam FB. & CP. quam CB. Cum igitur tangentium differentiæ reſpondentes arcubus KL. LB. BN. NO. componentes rectam HC. duæ ſint æquales ipſi HF. videlicet HF. PC. duæ minores FB. BP. componentes vero HG. ſint omnes æquales ipſi HF. erit tota HG. maior toti HC. Igitur punctum O. cadet inter S. & K. & punctum C. inter G. & H. ducatur AG. ſecans circulum in S. Cum ſit vt OK. ad KL. ita GH. ad HF. vtrobique enim ratio eſt quadrupla, erit maior ratio SK. ad KL. quam GH. ad HF. Ita inter puncta H. F. accipiatur punctum T. ad quod ex centro ducatur AT. ſecans circulum



culum

culum in R. Quoniam GH. ad HF. minorem habet rationem quam SK. ad KL. & HF. ad HT. minorem quam LK. ad KR. erit ex æquali minor ratio GH. ad HT. quam SK. ad KR. Rurſus cum ſit minor ratio SB. ad BK. quam GB. ad BH. & componendo minor ratio SK. ad KB. quam GH. ad HB. erit eadem ad minorem, ſit vt GH. ad HB. ita SK. ad KQ. & ducatur AQV. Quoniam maior eſt ratio GH. ad HV. quam GH. ad HB. vt autem GH. ad HB. ita SK. ad KQ. maior erit ratio GH. ad HV. quam SK. ad KQ. 8.huius. 26.1.huius. 8.5. 8.5.

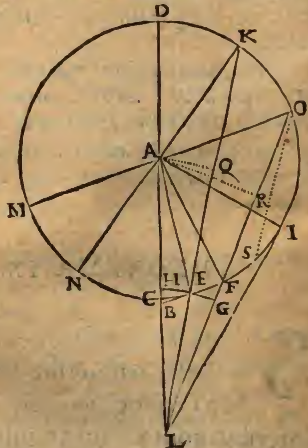
Oſtendimus igitur maiorem poſſe eſſe rationem SK. ad KL. quam GH. ad HF. minorem autem SK. ad KQ. quam GH. ad HV. ideo conuertendo, & diuidendo, maiorem eſſe rationem HF. ad FG. quam KL. ad LG. minorem autem HV. ad VG. quam KQ. ad QS. quod oſtendere volebamus.

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum dictis lateribus contentum angulo inæqualem: maior angulus compræhenſus, ad vtrumlibet reliquorum maiorem habet rationem, quam minor compreheſus, ad reliquos, ſi maiores vnique trianguli cum maioribus, & minores cum minoribus comparentur.

Sint duo triangula LAF. LAE. quæ duo latera LA. AF. duobus lateribus. LA. AE. æqualia habeant, ſit vero. LA. maius tam latere. AF. quam AE. & angulus LAF. æquali-

bus lateribus compræhenſus, maior angulo LAE. æquali-bus item comprehenſo. Dico maiorem eſſe rationem anguli FAL. ad angulum FLA. quam EAL. ad ELA. Item maiorem eſſe rationem anguli FAL. ad AFL. quàm EAL. ad AEL. Componantur duo latera maiora in vnam lineam rectam AL. & per reliqua duo AE. AF. æqualia, centro A. deſcribatur circulus CEF. ſecans AL. in C. ductaq; recta LI. tangat circulum in I. ac primo cadant puncta EF. inter C. & I. Item centro L. diſtantia LE. deſcribatur circulus HEG. ſecans AL. in H. & LF. in G. & per puncta FE. ducatur FB. ſecans AL. in B.) Secabit autem, cum angulus. LAF. recto minor ſit, nam cum rectus ſit LIA. erit LAI. ac multo



32.1. to magis eius pars LAF. acutus, & in triangulo Iſo ſcele AFE. angulus ad baſim AFE. acutus; quare angulis AFB. FAB. exiſtentibus minoribus duobus
13.Pron. rectis, concurrent AB. FB.
8. 5. ad partes B.) maior erit ratio ſectoris AFE. ad triãgulum AEB. quam trianguli AFE. ad idem triangulum
8. 5. AEB. ſed ſector AFE. ad ſectorem AEC. adhuc maiorem habet rationem, quàm ad triangulum AEB. igitur ſector
33. 6. AFE. ad ſectorem AEC. id eſt arcus FE. ad arcum EC. ma-
1.6. iorem habet rationem, quàm triangulum AFE. ad triangulum AEB. id eſt, quam FE. ad EB. & conuertendo, minor eſt ratio arcus CE. ad arcum CF. quàm BE. ad EF. Eodem prorſus modo oſtendemus, maiorem eſſe rationem ſectoris HLE. ad ſectorem ELG. id eſt arcus HE. ad arcum

EG.

EG. quam trianguli BLE. ad triangulum ELF. id eſt, quàm BE. ad EF. quare minor erit ratio BE. ad EF. quàm arcus HE. ad arcum EG. cùm ergo minor ſit proportio CE. ad EF. quam rectæ BE. ad rectam EF. & BE. ad EF. minor quàm arcus HE. ad arcum EG. erit ex æquali, minor ratio arcus CE. ad EF. id eſt, anguli LAE. ad EAF. quàm arcus HE. ad EG. id eſt anguli ALE. ad angulum ELF. & permutando, conuertendo, ac componendo, maior erit ratio FAL. ad FLA. quàm EAL. ad ELA. 33. 6.

Quod vero maior ſit ratio FAL. ad AFL. quam EAL. ad AEL. Ita oſtenditur. Quoniam maior eſt angulus LEA. angulo LFA. & minor angulus EAL. angulo FAL. maior erit ratio LEA. ad EAL. quàm LFA. ad FAL. ergo maior ratio FAL. ad LFA. quam EAL. ad LEA. Cor. 26. 5.

Idem oſtenditur ſi alterum horum punctorum cadat in punctum contactus I.

Cadant ſecundo puncta. E. F. ſupra punctũ contactus I. in puncta K. O. habeantq; duo triangula KAL. OAL. duo latera KAL. OAL. æqualia, & ſit angulus KAL. maior angulo OAL. ſecentq; baſes LK. LO. circulũ in punctis E. F. inter puncta C. I. Conſtat angulũ KAL. eſſe maiorẽ angulo OAL. & angulum OLA. maiorem angulo KLA. totũ parte: ſed & angulus LOA. maior eſt angulo LKA. (cum enim angulus KAE. maior ſit angulo OAF. erunt reliqui duo. AKE. AEK. reliquis duobus AOF. AFO. minores, ideoque dimidium AKE. dimidio AOF. minus.) Igitur rurſus maior erit ratio anguli KAL. ad angulum ALK. quàm OAL. ad ALO. item maior ratio KAL. ad AKL. quàm OAL. ad AOL. 32. 1.

Idem probabimus, ſi altera dictarum linearum tranſeat per punctum I. Cum manifeſtum ſit angulum LAI. eſſe partem cuiuslibet angulorum ſuperiorum ad A. & angulum LIA. rectum eſſe maiorem acutis AKL. AOL. deniq; ALI. eſſe maiorem ſingulis ALE. ALF.

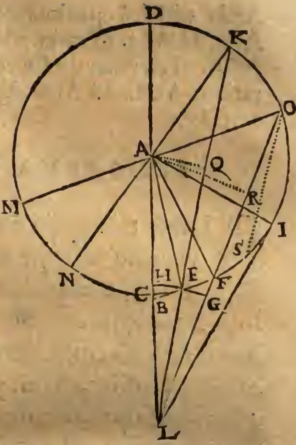
Deni-

Denique ſecet altera baſium dictorum triangulorum;circulum in puncto O. ſupra punctum contactus I. altera infra, ſit in puncto E. habeantq; rurſus triangula OAL. EAL. duo latera OA. AL. duobus lateribus EA. AL. æqualia, & ſit angulus OAL. maior angulo EAL. Quoniam ex prima parte huius maior eſt ratio anguli OAL. ad ALO. quam IAL. ad ALI. & IAL. ad ALI. maior, quàm FAL. ad ELA. ex prima parte huius propoſitionis, maior erit ratio OAL. ad ALO. quam EAL. ad ELA. item quia maior ratio OAL. ad AOL. quam IAL. ad AIL. & IAL. ad AIL. maior, quàm EAL. ad AEL. erit OAL. ad AOL. maior ratio, quã EAL. ad AEL. Quare ſi duo triangula &c. Quod erat demoſtrandum.

THEOREMA X. PROPOS. X.

SI duo triangula duo latera æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs comprehenſum angulo inæqualem. In triangulo in quo angulus comprænhenſus minor eſt, reliquorum angulorum maior ad minorem, maiorem habet rationem, quam in altero.

Sint duo triangula LAO. LAK. eodem modo diſpoſita, quo ſuperiori propoſitione, & ſit angulus LAK. compræhenſus maior angulo compræhenſo OAL. Dico in triangulo. LAO. angulum AOL. maiorem, ad angulum OLA. minorem, maiorem habere rationem, quam in triangulo LAK. angulum maiorem AKL. ad angulum minorẽ ALK. Cadat primo vterq; angulus. O. K. ſupra punctum contactus I. & ſecent rectæ LK. LO. conuexam peripheriam in punctis E. F. & ducantur ex centro A. rectæ AE. AF. Quoniam



niam maior eſt ratio anguli FAL. ad angulum FLA. quam EAL. ad ELA. (ex prima parte præcedentis propoſitionis) erit componendo maior ratio angulorum FAL. FLA. ad angulum FLA. quam angulorum EAL. ELA. ad ELA. ſed angulis FAL. FLA. ſimul eſt æqualis angulus externus. AFO. id eſt AOF. & angulis EAL. ELA. ſimul æqualis eſt angulus externus AEK. id eſt AKE. Igitur maior eſt ratio anguli AOF. ſeu AOL. ad angulum ALO. quam anguli AKE. id eſt, AKL. ad angulum ALK. 9.2.huius. 32. 1. 5. 1.

Idem eodem ferme modo demonſtrabitur ſi alterutrum punctorum vt F. cadat in punctum contactus. I. Cum enim ſuperiori propoſitione probata ſit maior ratio IAL. ad ILA. quam EAL. ad ELA. erit componendo maior ratio duorum IAL. ILA. ſimul, id eſt anguli AIL. (qui rectus eſt, ideoq; æqualis duobus reliquis IAL. ILA.) ad ILA. quàm duorum EAL. ELA. ſimul, id eſt externi AEK. ac proinde æqualis AKL. ad KLA. 9.2. huius.

Cadat ſecundo vtrumque punctum E. F. ſub punctum contactus I. cum angulus LEA. ſit maior angulo LFA. & angulus ELA. minor angulo FLA. maior erit ratio anguli LEA. ad angulum ELA. quam anguli LFA. ad angulum FLA. Neque aliter procedet demonſtratio, ſi punctum F. cadat in punctum contactus I. 21. 1.

Denique cadat alteruter angulorum ſupra punctum contactus, & alter E. infra, ille minor, hic maior: cum ratio

AEL.

AEL. ad ELA. paulo ante oſtenſa ſit maior quam ratio AIL. ad ALI. & ratio AIL. ad ALI. maior, quam ratio AOL. ad rationem ALO. erit ratio AEL. ad ELA. maior ratione AOL. ad ALO. Igitur ſi duo triangula. &c. Quod erat. &c.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI duo triangula duo latera æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs compræhenſum angulo inæqualem: complementa angulorum æqualibus lateribus compræhenſorum, ad duos rectos, maius ad minus, maiorem quidem rationem habet, quam angulus ſub minori baſi, & maiori latere in vno triangulo, ad angulum ſub maiori baſi & maiori latere in altero triangulo, minorem vero, quam angulus ſub minori baſi, & minori latere in vno triangulo, ad angulum ſub maiori baſi, & minori latere in altero triangulo.

Ijſdem poſitis, quæ ſuperioribus propoſitionibus ſecet
13. 1. diameter BD. circulum in D. erunt KAD. OAD. complementa angulorum æqualibus lateribus compræhenſorum KAL. OAL. ad duos rectos, & angulus OLA. contentus minori baſium OL. & maiori laterum LA. Angulus KLA. contentus maiori baſium LK. & maiori laterum LA. Angulus autem LOA. contentus minori baſium LO. & minori laterum AO. & angulus LKA. contentus maiori baſium LK. & minori laterum KA. Dico primo, angulum OAD, ad angulum KAD. maiorem habere rationem quam OLA. ad
10.2.huius. KLA. minorem quam LOA. ad LKA. Nam cum maior ſit

ratio

ratio AOL.ad ALO. quam AKL.ad ALK. erit componendo maior ratio vtriuſque AOL. ALO. ſimul id eſt ipſius DAO. externi illis æqualis,ad ALO. quam AKL. ALK. ſimul, id eſt ipſius DAK. ad ALK. Rurſus cum minor ſit ratio OLA. ad LOA. quam KLA. ad AKL. erit componendo minor ratio vtriuſque OLA. LOA. ideſt DAO. ad LOA. quam vtriuſque KLA.AKL.ideſt ipſius DAK.ad AKL.& permutando.

32. 1.

10.2.huius.

Sint ſecundo triangula AFL. AEL. in quibus complementa angulorum æqualibus lateribus compræhenſorum, ſint EAD.FAD.& angulus ELA. contentus minori baſium EL. & maiori latere LA. angulus autem FLA. contentus maiori baſium FL. & maiori latere LA. Rurſus angulus LEA.contentus minori baſium LE.& minori laterũ EA.& angulus LFA.contentus maiori baſium LF.& minori latere FA. Dico angulũ EAD. ad angulũ FAD. minorem habere rationem quam angulum LEA.ad angulum LFA. maiorem verò quam ELA. ad FLA. Nam cum maior ſit angulus AEL. angulo AFL. ſi vtrique addantur anguli,illi quidem minor ELA. iſti maior FLA. maior erit ratio anguli AEL. ad angulum AFL.quam duorum AEL.ALE.ſimul,ad duos AFL. ALF. ſimul. Sed duobus AEL. ALE. ſimul æqualis eſt angulus externus EAD. & duobus itidem AFL. ALF. æqualis eſt externus FAD. Igitur maior eſt ratio AEL. ad AFL.quam EAD.ad FAD. ideoque minor EAD. ad FAD. quam AEL. ad AFL. Quod verò maior ſit ratio EAD. ad FAD.quam ELA. ad FLA. patet,quia illic eſt ratio maioris inæqualitatis, hic vero minoris. Idem oſtendetur in omnibus caſibus in quibus triangulum AEL.cadet intra triangulum, vt intra triangula AOL. AKL. nam eodem modo probabimus maiorem eſſe rationem AEL. ad AOL. aut AKL. quam EAD. ad OAD. vel KAD.

21. 1.

6.1.primi huius.

32. 1.

Sed ſint tertio triangula AEL. LKA.ſecetque LK.ipſam AF. Dico minorem eſſe rationem FAD. ad KAD. quam AFL. ad AKL. maiorem vero quam FLA. ad KLA. Nam

L ex

ex ſecunda parte huius, maior eſt ratio AFL. ad AOL. quam FAD. ad OAD. & ex prima parte huius, maior eſt ratio AOL. ad AKL. quam OAD. ad KAD. Igitur ex æqualitate, maior eſt ratio AFL. ad AKL. quam FAD. ad KAD. ideoque minor FAD. ad KAD. quam AFL. ad AKL. Denique cum maior ſit ratio OAD. ad KAD. quam FLA. ad KLA. vt conſtat ex prima parte hu-
8. 5. ius propoſitionis, at vero multo maior ſit ratio FAD. ad KAD. quam OAD. ad KAD. manifeſtum eſt maiorem eſſe rationem FAD. ad KAD. quam FLA. ad KLA. Quod tandem demonſtrandum fuerat.

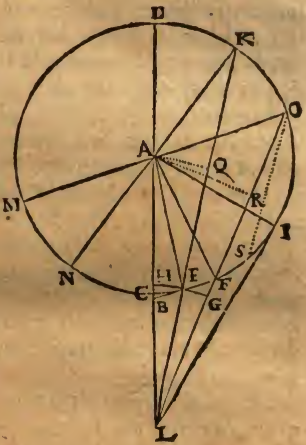
THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI duo triangula duo latera æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs compræhenſum angulo inæqualem: anguli æqualibus lateribus compræhenſi, maior ad minorem, maiorem habent rationem, quam habeat complementum anguli ſub maiori baſi, & minori latere contenti, ad duos rectos, in vno triangulo, ad complementum anguli ſub minori baſi, & minori latere in altero triangulo.

SINT eadem quæ ſuperioribus propoſitionibus, ſintque anguli KAL. OAL. æqualibus lateribur compræhenſi, ille maior, hic minor: & ſit primo LOA angulus contentus
8. 3. minori baſe LO. & minori latere AO. Item angulus LKA. ſub maiori baſi LA. & minori latere AK. erit angulus AFO.
15. def. & 5. 1. æqualis angulo AOF. & angulus AEK. æqualis angulo AKE. Angulorum autem AFO. AEO. complementa ad
13. 1. duos rectos ſunt AFL. AEL. Igitur angulorum AOL. AKL.

com-

complementa ad duos rectos ſunt AFL. AEL. Dico maiorem eſſe rationem anguli KAL. ad angulum OAL. quam anguli AEL. ad angulum AFL. productis enim OAM. KAM. maior erit angulus externus OAD. angulo interno LOA. Item KAD. maior, quam LKA. & LOA. quã LKA. ille enim maiori arcui MF. inſiſtit, hic minori NE. & arcus OK. differentia angulorum OAD. KAD. maior quã differentia angulorum LOA. LKA. (Nam eorum differentia eſt medietas arcus MN. ſeu KO. & medietas arcus EF. qui minor eſt quam KO. vt conſtat ſi ducatur ipſi *K*L. parallela OS. erit enim EF. minor quã ES. quæ æqualis eſt ipſi *K*O. quare etiam medietas ipſius EF. erit minor medietate reliqua ipſius *KO*:) Quare ſi per 14. primi huius, ſtatuantur duo recti prima quantitas, & duo itidem recti ſecunda quantitas, tertia autem quantitas ſit angulus *OAD*. quarta *KAD*. quinta *LOA*. id eſt *AFO*. & ſexta *LKA*. ſeu *AEK*. ac ex prima quantitate, nempe ex duobus rectis, auferantur anguli *OAD*. *KAD*. ex ſecunda autem, nimirum ex duobus rectis, demantur anguli *AFO*. *AEO*. cum angulus *OAD*. ſit maior angulis *KAD*. *AFO*. & *AFO*. maior quam *AEK*. & differentia angulorum OAD. *KAD*. maior differentia angulorum *AFO*. *AEO*. erit ex dicta propoſitione 14. 1. huius ratio anguli *KAL*. (qui complementum eſt quartæ quantitatis *KAD*. ad duos rectos) ad angulum 14. 1. huius.



OAL. (qui eſt complementum tertiæ quantitatis *OAD.*) maior quam anguli *AEL.* (complementi ſextæ quantitatis *AEK.*) ad angulum *AFL.* qui eſt complementum quintæ quantitatis AFO. Quod primo probandum erat.

Sint ſecundo anguli *LAF. LAE.* æqualibus lateribus cõpræhenſi, ille maior, hic minor, & ſit *LEA.* angulus contentus minori baſi LE. & minori latere *EA.* Item angulus
8. 3. *LFA.* contentus maiori baſe LF. & latere minori *FA.* erunt
13. 1. 15. def. & anguli *AEK. AFO.* (æquales ipſis *AKE. AOF.*) complemen-
5. 1. ta angulorum *AEL. AFL.* ad duos rectos. Dico anguli *FAL.* ad angulum *EAL.* maiorem eſſe rationem, quam an-
9. 2. huius. guli *AOL.* ad angulum *AKL* Nam cum probata ſit 9. huius, minor ratio anguli *ALF.* ad *FAL.* quam *ELA.* ad *EAL.* erit componendo minor ratio vtriuſque *A*LF. *FAL.* id eſt
32. 1. & *AFO*: ſeu *AOL.* ad *FAL.* quam vtriuſque *ELA. EAL.* id eſt
5. 1. *AEK.* id eſt. *AKE.* ad *EAL.* Quare conuertendo & permutando, maior eſt ratio *FAL.* ad *EAL.* quam *AOL.* ad *AKL.* Poterat hæc ſecunda pars ex principijs primæ partis huius deduci, ſed vt breuitati conſuleremus, eam aliunde deduximus.

Sint tertio anguli *FAL. KAL.* æqualibus lateribus compræhenſi ille minor, hic maior; cadantque puncta *F. K.* illud ſub punctum contactus, hoc ſupra, & ſit *LFA.* angulus contentus ſub baſi minori LF. & minori latere *FA.* item angulus *LKA.* contentus ſub baſi maiori LK. & latere minori *KA.* Erit angulus *FAD.* complementum anguli *FA*L. ad duos rectos, & angulus *KAD.* complementũ anguli *AKL.* ad duos rectos minus complemento ipſo *FAD.* vt pote pars toto, quorum differentia eſt angulus *KAF.* quæ maior eſt differentia angulorum *LFA.* & *LKA.* Nam ex prima parte huius propoſitionis conſtat, differentiam angulorum MOF. NKE. nimirum medietates arcuum MN. EF. eſſe minorem angulo *KAO.* Rurſus angulus *LFA.* æqualis eſt
20. 3. duobus internis *FOA. FAO.* id eſt arcui OF. & dimidio arcui FM. & angulus NKE. dimidio arccui NE. Quare differentia

rentia angulorum *LFA* & *LKA*. id eſt EKN. erit totus arcus OF. vna cum medietate arcuum MN.EF. Sed medietas arcuum MN. EF. minor eſt angulo *KAO*. id eſt arcu KO. Igitur ſi communis addatur arcus OF. erit arcus KF. maior arcu OF. vna cum medietate arcuum MN. EF. at vero arcus *KF* eſt differentia angulorum *FAD*. *KAD*. & arcus OF. vna cum medietate arcuum MN. EF. eſt differentia angulorum LFA. LKA. Igitur maior eſt differentia angulorum FAD. & KAD. quam angulorum LFA. LKA. Quare rurſus ſi per 14. primi huius ſtatuantur duo recti prima quantitas, & duo itidem recti ſecunda quantitas, tertia autem quantitas ſit angulus FAD. quarta KAD. quinta LFA. ſexta LKA. ac ex prima quantitate, nempe ex duobus rectis auferantur tertia FAD. & quarta *KAD*. ex ſecunda autem, videlicet ex duobus rectis demantur quinta LFA. & ſexta LKA. ſitque FAD. maior quam LFA. & quam KAD. & LFA. maior quã LKA. (Nam LFA. maior eſt quam LOA. & LOA. maior quam LKA. vt ſupra oſtenſum eſt) & differentia angulorum FAD. KAD. maior differentia angulorum LFA. LKA. erit ex dicta propoſitione 14. primi huius maior ratio anguli KAL. ad angulum FAL. videlicet complementi quartæ KAD. ad complementum tertiæ FAD. quam complementi anguli *LKA*. qui ſexta quantitas eſt, ad complementum anguli *LFA*. qui quinta quantitas, poſitus eſt. Atque ita in quolibet alio ſitu oſtendemus, quod propoſitum eſt. Quare ſi duo triangula &c. Quod fuit demonſtrandum &c.

16. & 6. 1. pronunc.

14. 1. huius.

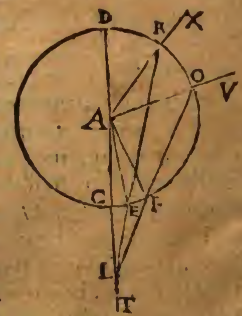
Hanc propoſitionem, etiam in ſequenti, quam multo ampliorem reddidimus, facilius, ac breuius demonſtrabimus, vt inde variæ probandi rationes, in vna, ac eadem materia, eluceſcant, quod à veteribus Geometris, ac Pappo præſerſertim, in collectionibus mathematicis, factitatum legimus.

THEO-

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

SI duo triangula duo latera æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs comprçhenſum angulo inæqualem: anguli æqualibus lateribus compræhenſi, maior ad minorem, maiorem habent rationem, quam complementa angulorum reliquorum ad duos rectos ſi baſibus, ac maiori laterum; item baſibus ac minori laterum contenti, maioreſque cum minoribus conferantur.

IN figura nonæ huius, habeant duo triangula LAK. LAO. duo latera LA. AK. duobus LA. AO. æqualia vtrumq; vtrique, & angulus comprædhenſus LAK. maior ſit comprædhenſo LAO. Dico maiorem eſſe rationem anguli LAK. ad angulum LAO. quam complementi anguli AKL. ad duos rectos, ad complementum anguli AOL. Item quam complementi anguli ALK. ad complementum anguli ALO. producantur AL. in T. AO. in V.



13. 1. AK. in X. erunt anguli TLK. TLO. complementa angulorum ALK. ALO. ad duos rectos, & anguli XKL. VOL. complementa angulorum AKL.
9.2.huius. AOL. Quoniam maior eſt ratio anguli LAK. ad angulum AKL. quam anguli LAO. ad angulum AOL. erit componendo, & permutando maior ratio angulorum LAK. AKL. ſimul ad angulos LAO. AOL. ſimul, quam anguli

AKL.

AKL. ad angulum AOL. Quare cum maior ſit ratio totius LAK.AKL.ſimul,ad totum LAO.AOL. ſimul,quam partis AKL. ad partem AOL. etiam reliqui LAK. ad reliquum LAO.maior erit ratio,quam totius LAK.AKL.ſimul,ad totum LAO.AOL.ſimul:ipſis autem LAK.AKL.ſimul æqualis eſt externus TLK. & ipſis LAO. AOL. ſimul æqualis eſt externus TLO. Igitur maior eſt ratio anguli LAK. ad angulum LAO.quam anguli TLK.ad angulum TLO. Rurſus quoniam maior eſt ratio anguli LAK. ad angulum ALK. quam anguli LAO.ad angulum ALO.vt conſtat ex nona ſecundi huius,erit componendo, & permutando, maior ratio LAK. ALK. ſimul ad LAO. ALO. ſimul quã ALK.ad ALO. ideoque cum maior ſit ratio totius LAK. ALK. ad totum LAO.ALO.ſimul,quam partis ALK. ad partem ALO. etiã reliqui LAK. ad reliquum LAO. maior erit ratio quam totius LKA. AKL. ad totum LAO. ALO. ſed toti *LAK. ALK.* eſt æqualis angulus XKL.& toti L*A*O.*A*LO.æqualis eſt angulus VOL. Igitur anguli *LAK.* ad angulum LAO. maior eſt ratio quam anguli XKL. ad angulum VOL.

33. 5.

32. 1.

9. 2.huius.

32. 5.

32. 1.

Idem, eodem prorſus modo, demonſtrabitur in duobus triangulis quocumque ſitu collocatis; vt in triangulis LAE. LAF.item in triangulis LAO.LAE. Eadem enim vbique demonſtrandi forma, propoſitum efficiemus, vt inducenti manifeſtiſſime patet. Quare ſi duo triangula duo latera æqualia habuerint &c. Quod fuit demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVod ſi anguli compræhenſi ſint ſuis complementis ad idem punctum maiores, minor erit ratio angulorum compræhenſorum, quam ſuorum complementorum, ſi minores, maior, ex 22. primi huius: Vt minor eſt ratio LAK. ad LAO.quam DAO.ad DAK. maior vero ratio, LAF.ad LAE. in triangulis LAF. LAE. quam EAD. ad FAD.

THEO-

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI duo triangula duo latera æqualia habuerint, vtrumque vtrique, in eodem vero triangulo inæqualia, & angulum ijs compræhenſum angulo inæqualem; ex angulis autem æqualibus lateribus cõpræhenſis in oppoſitas baſes perpendiculares demittantur: anguli, quos perpendicularium maior cum lateribus facit, in maiori ſunt ratione, quam quos minor, ſi maiores ad minores referantur.

IN figura ſuperiorum propoſitionum, ſint rurſus triangula, quorum toties facta mentio, LAK. LAO. & ducantur ex puncto *A*. ad baſes *LK*. LO. perpendiculares *AQ*. *AR*. hæc maior, illa minor. Dico maiorem eſſe rationem anguli *LAR*. ad angulum *RAO*. quam anguli *LAQ*. ad angulum *QAK*. Angulus enim *LOA*.
27. 3. maior eſt angulo *LKA*. Eo
18. 1. quod arcui MF. inſiſtat, qui maior eſt quam arcus NE. Idem angulus *LOA*. maior eſt quam *OLA*. ob latus *AL*. ſubtendens maius quam latus *AO*. & angulus *OLA*. totum maius quam pars *KLA*. Rurſus differentiam angulorum *LOA*. *LKA*. metitur medietas arcus MN. ideſt *KO*. & medietas arcus FE. ob arcus MF. NE. quibus dicti



angu-

anguli inſiſtunt. Differentia autem angulorum OLA. KLA. eſt angulus OLK. minor medietate arcus KO. (nã ſi duceretur recta KF. angulus KFO. externus, æqualis medietati arcus KO. eſt maior interno OLK.) Igitur differentia angulorum ad O. & K. maior eſt differẽtia angulorum OLA. KLA. 20. 3.
16. 1.
Quare ſi angulus rectus ſtatuatur tam prima quam ſecunda quantitas; LOA tertia; LKA. quarta; OLA. quinta; KLA. ſexta: erit per 14. 1. huius, maior ratio cõplementi KAQ. ad complementum OAR. quam complementi LAQ. ad complementum LAR. Quare & maior erit ratio LAR. ad LAQ. corol. 26. 5.
quam OAR. ad KAQ. & permutando maior LAR. ad OAR. quam LAQ. ad KAQ. Quod erat &c.

Eodem modo ſi ſtatuantur triangula FAL. EAL. in quorum baſes productas cadant perpendiculares eædem, AR. AQ. maior erit ratio LAR. ad FAR. id eſt, ad RAO. (æquales enim ſunt anguli FAR. RAO.) quam LAQ. ad Sch. 26. 1.
EAQ. qui ipſi QAK. eſt æqualis.

Denique in triangulis LAF. LAK. in quorum baſes LF. productam, & LK. intra triangulum, cadant eædem perpendiculares AR. AQ. eodem modo oſtendemus, maiorem eſſe rationem LAR. ad FAR. quam LAQ. ad QAK. Quod erat vltimo probandum.

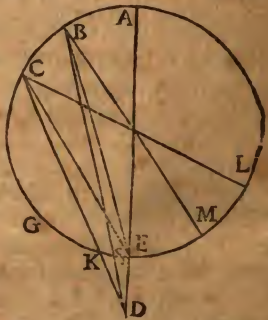
THEOREMA XV. PROPOS. XV.

Iiſdem poſitis: Dico maiorem eſſe rationem LAF. ad LAE. quam OAD. ad KAD. Nam probatum eſt maiorem eſſe rationem LAF. ad LAE. quam AOL. ad AKL. & AOL. ad AKL. maiorem, quam OAD. ad KAD. Igitur LAF. ad LAE. maior eſt ratio, quam OAD. ad KAD. Quod fuit &c. 13. huius.



THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

IN circulo ABC. cuius centrum. F. diameter AE. ſumatur extra circulum in diametro producta punctum D: à quo ducantur in conuexam peripheriam duæ rectæ DS. DK, quæ productæ ſecent cauam in B. C. ſintq; puncta K. S. ſub puncto contactus. G. quem efficit tangens circulum ducta recta DG. ex puncto D. & connectantur FK. FS. Dico maiorem eſſe rationem anguli FSD. ad angulum FKD. quam anguli BED. ad angulum CED. Ducantur CFL. BFM. ſecantes circulum in L. M. erit differentia angulorum LCK. MBS. id eſt FKC. FSB. illis æqualium medietas arcus ML. & medietas arcus KS. Differentia vero angulorum FEC. FEB. id eſt FCE. FBE. illis æqualium eſt medietas ſola arcus CB. id eſt medietas arcus ML. maior igitur eſt differentia angulorum FKC. FSB. quam differentia angulorum FEC. FEB. maior etiam eſt angulus KCF. id eſt CKF. angulo ECF. id eſt FEC. idemq; angulus CKF. eſt maior angulo BSF. vt patet ex ſuperioribus, & angulus FEC. maior angulo FEB. Quare ſi ex duobus rectis auferantur FKC. & FSB. item etiam ex duobus rectis demantur FEC. FEB. maior erit proportio complementi ipſius FSB. ad duos rectos, nimirum anguli FSD. ad complementum ipſius FKC. nimirum ad FKD. quam complementi ipſius FEB. videlicet ipſius BED. ad complementum ipſius FEC. nempe ad CED. Quod fuit probandum.



15. definit. & 5. 1.

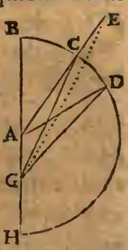
14. 1. huius.

THEO-

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

SI ab extremitate diametri duo arcus inæquales, accipiantur ad quos ex duobus punctis diametri ſingulis duæ ſectæ ducantur, ſintq; duæ ex puncto propiore extremitati ductæ, aut æquales inter ſe, aut propinquior minor remotiore, & angulorum ad punctum remotius conſtitutorum maximus, maior ſit angulo quem ex datis punctis ductæ ad remotiorem arcum efficiunt: anguli quos illæ cum diametro efficiunt conſtituti ad punctum remotius ab extremitate diametri, maiorem inter ſe proportionem habent, quàm conſtituti ad propinquius, ſi maiores cum minoribus conferantur.

In circulo BCD. cuius diameter AH. ſumantur ab extremo puncto. B. duo arcus inæquales BD. maior BC. minor; & in diametro duo puncta, A. G. quorum illud extremitati B. vicinius ſit, hoc remotius ex quibus ductæ ſint ad arcus rectæ AC. AD. GC. GD. efficientes cum diametro angulos illæ quidem CAB. minorem, DAB. maiorem; iſtæ CGB. minorem DGB. maiorem; ſintq; rectæ AD. AC. aut æquales inter ſe, aut AC. minor; & angulus AGD. maior angulo GDA. Dico maiorem eſſe rationem anguli DGB. ad angulum CGB. quam anguli DAB. ad angulum CAB. Sint primum lineæ AC. AD. inter ſe æquales. Quoniam duo triangula CAG. DAG. habeat duo latera. CA. AG. duobus lateribus DA. AG. æqualia, & angulus DAG. comprehenſus minor eſt angulo compræhenſo CAG. maiorq; eſt



10.2.huius angulus AGD. angulo ADG. ex ſuppoſitione, maior erit ratio anguli DGA. ad angulum ADG. quam CGA. ad ACG. & componendo maior ratio DGA. ADG. ſimul ad ADG. quam CGA. ACG. ſimul ad ACG. & permutando maior ratio DGA. ADG. ſimul ad CGA. ACG. ſimul quam ADG. ad ACG. Cum ergo totius AGD. ADG. ſimul, ad totum CGA. ACG. ſimul, maior ſit ra-
33. 5. tio quam partis ADG. ad partem ACG. & reliqui DGA. ad reliquum CGA. maior erit ratio quam totius DGA. ADG. id eſt anguli DAB. ad totum CGA. ACG. ſimul, id eſt angulum CAB.

Sit rurſus linea AC. minor linea AD. producatur AC. in E. & ſumatur AE. æqualis ipſi AD. & iungatur GE. Cum æquales ſint AE. AD. eodem prorſus modo quo priore parte huius, oſtendemus maiorẽ eſſe rationem DGA. ad EGA. quam DAB. ad EAB. ſed adhuc maior eſt ratio DGA. ad
8. 5. CGA. quam ad EGA. (cũ minor ſit CGA. ipſo EGA.) Igitur anguli DGA. ad angulum CGA. maior eſt ratio quam anguli DAB. ad angulum CAB. Quod fuit &c.

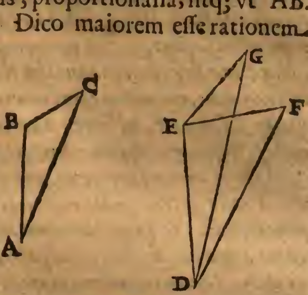
THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

SI duo triangula habuerint duo latera circa angulos inæquales proportionalia; anguli maioris compræhenſi ad reliquos maior erit ratio, quam anguli minoris compræhenſi ad reliquos, ſi prout proportionalibus lateribus opponuntur, inter ſe conferantur. Et trianguli, in quo eſt minor angulus compræhenſus, reliquorum angulorum maior ad minorem maiorem habet rationẽ, quam in alio triangulo reliquorum maior ad minorem.

Sint duo triangula ABC. DEF. quæ habeant duo latera AB. DE. Idem BC. DE. circa angulos inæquales

ABC.

ABC. maius DEF. minus, proportionalia; ſitq; vt AB.
ad BC. ita DE. ad EF. Dico maiorem eſſe rationem
anguli ABC. ad angu-
lum BAC. quam anguli
DEF. ad angulum EDF.
Item maiorem ABC. ad
BCA. quam DEG. ad
EGD. Deniq; ſi EFD.
maior ſit quã EDF. maio
rem eſſe rationem EFD.
ad EDF. quam BCA. ad
BAC. Fiat ad rectam



DE. angulus DEG. æqualis angulo ABC. & ſumatur EG.
æqualis ipſi EF. Quoniam eſt vt AB. ad BC. ita DE. ad
EF. ex hypotheſi, & vt DE. ad EF. ita DE. ad EG. ipſi
EF. ſumptam æqualem erit vt AB. ad BC. ita DE. ad EG.
ſunt autem, ex hypotheſi, anguli ABC. DEG. æquales,
erunt ergo triangula ABC. AEG. ſimilia. Quoniam er-
go in triangulis DEF. DEG. angulus DEG. maior eſt
angulo DEF. & latera DE. EG. lateribus DE. EF. æ-
qualia ſunt, conſtat primò ex 9. propoſit. ſecundi huius ma- 9.2.huius.
iorem eſſe rationem anguli DEG. ad angulum EGD. id eſt
ABC. ad BCA. quam anguli DEF. ad angulum EFD.
Item maiorem eiuſdem anguli DEG. ad angulum EDG.
id eſt ABC. ad BAC. quam DEF. ad EDF. Conſtat ſe-
cundo ex 10. propoſitione ſecundi huins maiorem eſſe ratio- 10.2.huius.
nem EFD. ad EDF. quam EGD. ad EDG. id eſt quam
BCA. ad BAC. Quod erat &c.

SCHOLIVM.

Atq; ita triangulis habentibus duo latera, circa angulum inæqualem, proportionalia, aptauimus propoſitiones nonam, & decimam huius. Eadem vero ratione illis accommodari poßunt quæcumq; propoſitionibus 11. 12. 13. 14. 15. *demon-*

ſtrata

ſtrata ſunt; Nam quæcumq; de inæquali angulorum ratione, in triangulis duo latera æqualia circa inæqualem angulum habentibus oſtenſa ſunt, eadem etiam triangulis duo latera proportionalia circa angulum inæqualem obtinentibus conueniunt; modo latera vnius, aut maiora, aut minora, eo pacto, quo in hac propoſitione factum eſt, ad latera alterius reducantur. Quod quia manifeſtiſſimum eſt, probatione, vtpote ſuperuacanea, abſtinebo.

Habent autem ſuperiores propoſitiones, ac præſertim poſteriores, a nona, mirum in Geometricis vſum, vt ex ſequentibus paſſim conſtabit: ac quemadmodum in ſuperiori libro, ex æqualitate vnius anguli, in duobus triangulis, magno vſu inquiſiuimus inæqualem laterum rationem, propoſit. 23.24.25. *ita hic ex duobus lateribus aut æqualibus, aut proportionalibus, in duobus triangulis angulorum inæqualem proportionem non minori compendio perueſtigamus.*

Vt vero memoriæ conſulamus, eorum quæ hac de re hactenus probauimus, hic epilogiſmus eſto.

In figura 13. *huius inſpiciantur duo triangula LAK. LAO. quæ habeant LA. AK. lateribus LA. AO. aut æqualia aut proportionalia, circa angulos LAK. LAO. maiorem illum hunc minorem, ſintq; reliqua ſuperioribus propoſitionibus delineata.*

9. huius. *I. LAK. ad AKL. maiorem habet rationem quam LAO. ad AOL.*

9. huius. *II. LAK. ad ALK. maiorem habet rationem quam LAO. ad ALO.*

10. huius. *III. Maior eſt ratio LOA. ad OLA. quam LKA. ad KLA.*

12. & 13. hui. *IV. Ratio KAL. ad OAL. eſt maior, quam XKL. ad VOL.*

13. huius. *V. Ratio KAL. ad OAL. eſt maior, quam TLK. ad TLO.*

11. huius. *VI. Maior ratio LOA. ad LKA. quam OAD. ad KAD.*

11. huius. *VII. Minor eſt ratio OLA. ad KLA. quam OAD. ad KAD.*

14. huius. *VIII. LAR. ad RAO. maiorem rationem habet, quam QLA. ad QAK.*

15. huius. *IX. Proportio LAF. ad LAE. maior eſt, quam OAD. ad KAD.*

16. huius. *X. Ratio KCL. ad OCL. minor eſt, quam AEL. ad AFL.*

THEO-

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

SI ſint duo circuli eccentrici, quorum maior minorem contineat, ſintq; vtriuſq; centra intra circulum minorem, ex quorum vtrouis duæ rectæ ducantur circulos ſecantes arcus dictis lineis contenti, ad arcus vtrauis harum linearum, & ſemidiametro maioris circuli, in qua eſt centrum minoris compræhenſos, maiorem habent rationem in exteriori circulo quam in interiori, ad eorum vero complementa ad duos rectos, maiorem.

Sint duo circuli GEF. HCD. eccentrici, ille maior, qui hunc minorem contineat, illius centrum B. huius A. vtrumque intra circulum minorem HCD. ac recta per vtriuſque centrum ducta LG. ſecans circulorum peripherias maioris quidem in L.G. punctis, minoris in I. H. & ſit centrum circuli minoris A. in ſemidiametro circuli maioris BG. Ducantur primum (vt videre eſt in ſiniſtro ſemicirculo huius figuræ) duæ rectæ ex centro circuli minoris AE. AF. ſecantes exteriorem circulum in E. F. interiorem in C. D. & connectantur BE. BF. Dico maiorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH. aut FE. ad FG. quam DC. ad DH. minorem vero eſſe proportionem EF. ad FL. quam CD. ad DI. aut EF. ad EL. quam CD. ad CI. Cum enim duo triangula FBA. EBA. habeant duo latera FB. BA. duobus EB. BA. æqualia, vtrumq; vtriq; in eodem vero triangulo inæqualia, maior enim FB. id eſt GB. quam BA. & 15. def.



angulus

13.2.huius. angulus FBA. maior angulo EBA. erit maior ratio angu-
33. 6. li FBA. hoc eſt arcus FG.ad angulum EBA. id eſt arcum
13. 1. EG. quam complementi anguli FAB. id eſt angulus FAG. hoc eſt arcus DH. ad complementum anguli EAB. id eſt angulum CAG. hoc eſt arcum CH. hoc enim 13. huius demonſtratum eſt, & diuidendo maior ratio FE. ad EG. quam DC. ad CH. &c.

Rurſus in iiſdem triangulis, angulus EAB. continetur ſub minori baſi EA. & minori latere AB. & angulus FAB.
7. 3. ſub maiori baſi FA. & minori latere AB. ſuntque anguli EBL. FBL. complementa angulorum æqualibus lateribus
11.2. huius. compræhenſorum. Igitur maior eſt ratio anguli EAB. ad angulum FAB. id eſt arcus CI. ad arcum DI. quam anguli EBL. ad arcum FBL. id eſt quam arcus EL. ad arcum FL. vt vndecima ſecundi huius probatum eſt & diuidendo maior ratio CD. ad DI. quam EF. ad FL. & componendo, conuertendo, ac per conuerſionem rationis, maior ratio CD. ad CI. quam EF. ad EL. Quod fuit primo demonſtrandum.

Sed ducantur ſecundo (in dextra parte figuræ) ex centro B. maioris circuli duæ BE. BF. ſecantes externum circulum in punctis F. E. internum in punctis D. C. & connectantur AC. AD. Dico maiorem eſſe rationem arcus FE. ad arcum EG. quam DC. ad CH. maiorem vero CD. ad DI. quam EF. ad FL.

Rurſus cum duo triangula CAB. DAB. habeant duo latera CA. AB. duobus lateribus DA. AB. æqualia vtrum-
15. definit. que vtriq; in eodem vero triangulo inęqualia nam maior eſt CA. id eſt AI. parte AB. & angulus CAB. maior angu-
15. definit. lo DAB. erit ex 13. ſecũdi huius, maior ratio anguli CAB.
13.2.huius. ad angulum DAB. id eſt arcus CI. ad arcum DI. quã complementi anguli CBA. id eſt anguli EBL. id eſt arcus EL. ad complementũ anguli DBA. id eſt angulum FBL. id eſt arcũ FL. & diuidendo maior ratio CD. ad DI. quam EF. ad FL.

Denique in iiſdem triangulis anguli DBA. CBA. continentur,

tinentur, ille ſub minori baſi, & minori latere, hic ſub maiori baſi, & minori latere ſuntque DAH. CAH. complementa angulorum æqualibus lateribus compræhenſorum.

Igitur, ex 11. ſecundi huius, maior eſt ratio anguli DBA. ad angulum CBA. ideſt arcus FG. ad arcum EG. quam anguli DAH. ad angulum CAH. ideſt arcus DH. ad arcum CH. & diuidendo. Igitur ſi ſint duo circuli eccentrici &c. Quod erat demonſtrandum. 11.2. huius.

THEOREMA XX. PROPOS. XX.

SI ſint duo circuli eccentrici, quorum maior minorem contineat, ſitque maioris centrum in peripheria minoris: Duæ rectæ ex minoris centro ductæ, ex vtroque circulo arcus abſcindunt, quorum exterior ad arcum ſui circuli inter vtramuis linearum, & ſemidiametrum maioris circuli, in qua eſt centrum circuli minoris, compræhenſum, maiorem rationem habet, quam interior ad ſuum, ad complementum vero minorem. Duæ verò rectæ ex centro maioris circuli ductæ auferunt arcus proportionales arcubus ductís à lineis verſus ſemidiametrum maioris circuli in qua eſt centrum minoris; ex alia verò parte maiori proportione interiores quam exteriores.

Sint ijdem circuli, qui in ſuperiori propoſitione, ſed centrum maioris B. cadat in peripheriam minoris, & ex centro minoris A. ductæ rectæ AE. AF. in ſiniſtra parte ſchematis abſcindunt ex maiori circulo arcum EF. ex minori arcum CD. Dico rurſus maiorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH. & maiorem CD. ad DB. quam EF. ad FL. Cum enim ſit eadem diſpoſitio, ac ratio triangulorum FBA. EBA

quæ in prima parte præcedentis propoſitionis, eadem etiam omnino demonſtratione, ex 13. huius, probabimus quod propoſitum eſt, vt ideo neceſſe non ſit ſuperflua repetitione lectorem detinere.



Sed ducantur in dextra parte ſchematis ex centro maioris circuli B. duæ rectæ BE. BF. ſecantes exteriorem circulum in punctis E. F. interiorem in punctis CD. Dico eandem eſſe rationem arcus DC. ad arcum CH. quæ
20. 3. arcus FE. ad arcum EG. & maiorem CD. ad DI. quam EF.
15. 5. ad FL. Nam anguli HAD. HAC. dupli ſunt angulorum,
33. 6. GBF. GBE. igitur vt GAD. ad GAC. ita GBF. ad GBE. id eſt, vt arcus DH. ad arcum DC. ita arcus FG. ad arcum EG.
20. 3. & diuidendo.

Denique quia ratione maior eſt arcus CD. quam EF. &
16. 1. minor DB. quam FL. angulus enim FBL. ideſt arcus FL.
8. 5. maior eſt angulo BAD. hoc eſt arcu DB. maior erit ratio
8. 5. CD. ad DB. quam EF. ad DB. ſed EF. ad DB. habet maiorem rationem quam EF. ad FL. Igitur maior eſt ratio CD. ad DB. quam EF. ad FL. Quod vltimo probandum erat.

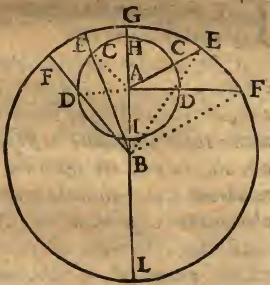
THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

SI ſint duo circuli eccentrici, quorum maior minorem contineat, ſitq; maiori centrũ extra peripheriam minoris: Duæ rectæ ex minoris centro ductæ ex vtroque circulo arcus abſcindunt, quorum exterior ad arcum ſui circuli inter vtramuis linearum, & ſemidiametrum maioris circuli, in

qua

qua eſt centrum circuli minoris, compræhenſum, maiorem rationem habet quam interior ad ſuum, ad complementum vero, minorem. At vero duæ rectæ ex maioris centro ductæ vtrumque circulum ſecantes, arcus abſcindunt, quorum interior ad vtrumuis arcuum inter ductas, & diametrum compræhenſum in ſuo circulo, maiorem habet rationem, quam exterior ad arcus ſimiliter poſitos, in ſuo.

Ponantur ijdem circuli, qui duabus ſuperioribus propoſitionibus, ſed centrum maioris B. cadat extra ambitum minoris, & ex centro minoris A. ducantur, vt prius in ſiniſtra parte figuræ rectæ AE. AF. abſcindentes ex minori circulo arcum DC. ex maiori arcum FE. Dico iterum maiorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH. & minorem EF. ad FL. quam CD. ad DI. Hoc vero ex duobus triangulis FBA. EBA. eadem omnino ratione probatur qua in 1. parte 19. huius.



At verò due rectæ BE. BF. ex centro maioris circuli prodeuntes, (vt cernere eſt in dextro ſemicirculo) auferant ex circulo minori arcum CD. ex maiori arcum EF. Dico maiorem eſſe rationem DC. ad CH. quam FE. ad EG. & maiorem CD. ad DI. quam EF. ad FL. Cum enim duo triangula CAB. DAB. duo latera CA. AB. duobus lateribus DA AB. æqualia habeant, vtrumque vtrique & angulus CAB. maior angulo compræhenſo DAB. complementa angulorum compræhenſorum nimirum anguli DAG. CAG 15. defin.

33. 6. ad duos rectos id eſt arcus DH.CH. maiorem habent ratio-
11.2. huius. nem quã angulus ſub minori baſi DB.& maiori latere BA.
8. 3. ad angulum CBA. ſub maiori baſi BC.& maiori latere BA.
1. pron. contentum. hoc eſt quam arcus FG. ad arcum EG. & diuidendo maior ratio DC. ad CH. quam FE. ad EG.

13.2. huius. Denique in ijſdem triangulis, maior eſt ratio anguli cõ-
33. 6. præhenſi CAB. ad compræhenſum DAB. id eſt arcus CI. ad arcum DI. quam complementi anguli CBA. ad comple-
13 1. mentum anguli DBA. ad duos rectos, id eſt quam angulus
33. 6. EBL. ad angulum FBL. id eſt quam arcus EL. ad arcum FL. vt 13. huius demonſtratum eſt, & diuidendo, maior ratio CD. ad DI. quam EF. ad FL. Quod fuit vltimo loco probandum.

SCHOLIVM.

Ex ijs quæ tribus hiſce propoſitionibus demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt.

1 *Si ſint duo circuli eccentrici quorum maior minorem contineat, ſemper contingere, vt duæ rectæ ex minoris centro ductæ, ex vtroque circulo arcus abſcindant, quorum exterior inter vtramuis rectorum, & ſemidiametrum maioris circuli, in qua eſt centrum circuli minoris, comprahenſus, maiorem rationem habeat, quam interior ad ſuum, ad complementum vero minorem. Nam in primis figuris* 19. 20. 21. *huius demonſtratum eſt perpetuo, maiorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CG. minorem vero EF. ad FL. quam CD. ad DI.*

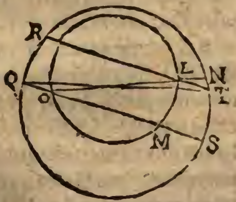
2 *Iiſdem poſitis, ſi duæ rectæ ex maioris circuli centro ductæ, arcus ex vtroque circulo abſcindant, ſemper exterior, ad arcum ſui circuli vtrauis ductarum rectarum, & ſemidiametro maioris circuli, in qua non eſt centrum minoris, compræhenſum, minorem habet rationem, quam interior ad arcum eodem modo compræhenſum. Nam in ſecundis figuris* 19. 20. 21. *huius probatum eſt ſemper minorem eſſe rationem EF. ad FL. quam CD. ad DI.*

3 *Adhuc iiſdem poſitis, ſi duæ rectæ ex maioris centro ductæ arcus ex vtroque circulo abſcindant, qui comparentur cum arcubus inter vtramuis rectarum, & ſemidiametrum maioris circuli in qua eſt centrum minoris, contentis: ſi quidem centrum maioris ſit intra circulum minorem, maior eſt ratio arcus exterioris abſciſſi ad ſuum arcum, quam interioris ad ſuum; ſi idem centrum ſit intra peripheriam minoris, eadem eſt ratio arcus exterioris abſciſſi ad ſuum arcum, quæ interioris ad ſuum: denique ſi idem centrum fuerit extra ambitum minoris, arcus exterior abſciſſus ad ſuum arcum minorem habet rationem, quam interior ad ſuum. Probatum enim eſt in ſecunda figura 19. maiorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH. In ſecunda 20. eandem eſſe rationem FE. ad EG. quæ DC. ad CH. Denique in ſecunda 21. minorem eſſe rationem FE. ad EG. quam DC. ad CH.*

LEMMA I.

SI circulus circulum contineat, parallelæ rectæ lineæ vtrumque circulum ſecantes, maiores in interiori circulo proportione arcus compræhendunt quam in exteriori.

Contineat circulus NS. circulum LM. & parallelæ RT. QS. ſecent vtrumque circulum, exteriorem in T. S. interiorem in LM. Dico arcum LM. interiorem dictis parallelis compræhenſum, proportionem maiorem eſſe arcu TS. compræhenſo iiſdem parallelis in circulo exteriori. Connectatur QT. & OL. quæ producatur dum circulum exteriorem ſecet in L. manifeſtum eſt punctum N. cadere ſupra punctum T. ideoque lineas ON. QT. ſe ſe inuicem ſecare inter puncta

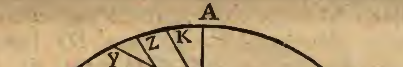


N. O.

LEMMA. III.

PArallelarum rectarum, quæ ex duobus punctis diametri in circuli peripheriam ducuntur, quæ perpendiculares ſunt, maximum arcum comprehendunt, & reliquarum, quæ perpendicularibus ſunt viciniores maiorem quam quæ remotiores: Rectarum verò quæ ex eodem puncto diametri vtrinque circulum ſecant, perpendiculares minimum arcum ſubtendunt, reliquæ autem eo maiorem, quo magis à perpendicularibus diſtant.

Sit circulus ADI. cuius centrum S. diameter AS. in qua ſumantur duo puncta B. C. ex quibus ducantur duæ paralle-



læ BD. CE. & BF. CG. & BH. CI. ſintque BD. CE. etiam per-

pendiculares ad AS. & duæ BF. BG. viciniores dictis per-
pendicularibus, quam BH. CI. Dico arcuum qui dictis pa-
rallelis comprehenduntur maximum eſſe DE. hinc FG. ma-
iorem quam HI. arcuum vero quos rectæ CE. CG. CI. pro-
deuntes ex eodem puncto C. & productæ in reliquam cir-
cumferentiam in puncta V. X. Z. ſubtendunt minimum eſſe
VAE. maximum ZCI. & XCG. maiorem quam VAE. Item
productis DB. FB. HB. in puncta T. Y. K. minimum eſſe ar-
cum TAD. maiorem YAF. maximum KAH. Ducantur CM.
CL. perpendiculares ad BF. BH. & ſecet CM. ipſam CH. in
R. Item ex centro S. ad eaſdem, perpendiculares SQ. SO.
29. 1. ſecantes etiam rectas CG. CI. in punctis N. P. erunt etiam
19. 1. anguli SNC. SPC. recti: minor igitur SN. quam SP. & SP.
quam SC. Quare cum minor ſit diſtantia chordæ ICZ. à
centro S. quam chordæ GCX. & chordæ GCX. minor quã
15. 3. chordæ ECV. maior erit ICZ. quam GCX. & GCX. quam
19. 1. ECV. Eodem modo cum minor ſit SO. quam SQ. & SQ.
quam SB. quæ diſtantię ſunt chordarum HK. FY. DT. à cen-
15. 13. Schol. 28. 3. tro S. maior erit HK. quam FY. & FY. quam DT. Igitur ma-
ior eſt arcus ZAI. arcu XAG. & XAG. maior ipſo VCE.
Item maior eſt arcus KAH. ipſo YBF. & YBF. arcu TBD.
Quod ſecundo loco propoſitum erat.
19. 1. Rurſus quia in triangulo rectangulo CMB. maior eſt CB.
19. 1. quam CM. & CM. totum, quam pars CR. & CR. quam CL.
34. 1. ſuntque CB. & CM. id eſt PQ. ipſi CM. æqualis; item CL.
hoc eſt NO. ipſi CO. æqualis, differentiæ ſinuum verſorum,
quarum maxime vicina centro eſt NO. remotior PQ. remo-
29. 1. huius. tiſſima CB. vt paulo ante oſtenſum eſt, erit, ex 29. primi
huius, minor ratio CB. ad PQ. quam arcus DE. ad arcum
8. 5. FG. Quare erit vt CB. ad minorem quam PQ. id eſt quam
CM. ita arcus DE. ad arcum FG. maior autem eſt oſtenſa
CB. quam CM. multo igitur maior erit CB. quam recta mi-
nor ipſa CM. ideoque maior arcus DE. quam arcus FG. At-
que eodem modo cum maior ſit MC. quam CL. id eſt PQ.
quam NO. oſtendemus arcum FG. eſſe maiorem arcu HI.
Quod primo loco propoſitum fuerat. SCHO-

SCHOLIVM.

INtelligenda eſt ſecunda pars lemmatis de arcubus minoribus ſemicirculo, nam ſi de maioribus ſermo ſit manifeſtum eſt à maiori chorda minorem arcum auferri, quam à minori; ex Scholio 28. 3.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

ARcuum, quos duæ parallelæ ex duobus punctis diametri in circuli peripheriam ductæ ſubtendunt, maximam habent inter ſe rationem quos perpendiculares, minimam quos remotiſſimæ à parallelis ſubtendunt, ſi maiores cum minoribus comparentur, ſinguliquе ſemicirculo minores exiſtant.

IN figura ſuperioris Lemmatis. Dico maiorem eſſe ra-



tionem arcus VAE. ad arcum TAD. quam arcus XAG. ad

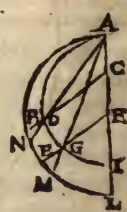
O arcum

arcum YAF. & arcus XAG. ad arcum YAF. maiorem, quã arcus ZAI. ad arcum KAH. Nam vt ſuperiori Lemmate oſtenſum eſt, minor eſt arcus TAD. arcu YAF. & maior TV. quam XY. ideoque eius duplum TV. DE. ſimul maius
8. 5. quam XY. FG. ſimul. Igitur maior eſt ratio TV. DE. ſimul ad TAD. quam XY. FG. ſimul ad YAF. & componendo, maior ratio VAE. arcus, ad arcum TAD. quam XAG. ad YAF. Atque eodem prorſus modo oſtendetur maiorem eſſe rationem XAG. ad YAF. quam ZAI. ad KAH. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

SI duo circuli ſeſe interius contingant, atque ex duobus punctis diametri communis duæ parallelæ ducantur vtrumque circulum ſecantes: duorum arcuum inter duas extremitates diametri, & parallelas compræhenſorum, maior erit inter ſe ratio in interiori circulo, quam in exteriori, ſi maiores cum minoribus comparentur.

Contingãt ſe due circuli ABL. ADI. ille externus, hic in-
11. 3. ternus, in puncto A. ex quo ducatur communis diameter AL. cuius extremitas in minori circulo ſit I. in maiori L. punctum, & ex duobus punctis C.F. in diametro ſumptis ducantur duę parallelæ CDB. FGE. ſecantes interiorem circulum in punctis D. G. exteriorem in B. E. & auferentes ex vtroque circulo duos arcus verſus extremitates I. & L. videlicet arcus DI. GI. in interno circulo, & arcus BL. EL. in externo. Dico maiorem eſſe rationem arcus DI. maioris ad minorem GI. quam arcus BL. maioris ad minorem EL. Ducantur rectæ AG. AD. & pro-



ducan-

ducantur, dum externum circulum ſecent in punctis M. N. manifeſtum eſt punctum M. cadere ſub punctum E. (cum puncta G. E. ſint in eadem recta FE. & cadat punctum M. ſub punctum G.) & punctum N. ſub punctum B. maior igitur eſt arcus NA. arcu BA. & arcus MA. arcu EA. arcubus autem MA. NA. proportione æquales ſunt arcus GA. DA. ſinguli ſingulis, vt conſtat ex Scholio 22. 3. Igitur arcus GA. proportione maior eſt quam arcus EA. & DA. quam BA. Cum autem æquales ſint proportione ſemicirculi AL. AI. ablatis inęqualibus AE. AG. remanent inæquales EL. maior GI. minor: minor igitur eſt ratio IG. ad GD. quã LE. ad GD. ſed arcus LE. ad arcũ GD. etiã minorem habet rationem, quam ad arcum EB. qui ſuperiori Lemmate probatus eſt minor arcu GD. Igitur minor eſt ratio IG. ad GD. quam LE. ad EB. & conuertendo, ac componendo, maior eſt ratio arcus DI. ad arcum GI. quam arcus BL. ad arcum EL. Quod fuerat demonſtrandum.

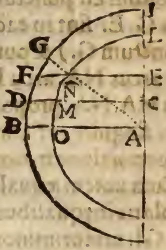
Schol. 22. 3. & Pappus Alexan. Lemmate ad 8. 4. 5. pron. 8. 5.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

SI ſint duo Quadrantes concentrici, ac lateri communi duę parallelę ducantur: arcus compræhenſus aut latere, & vna parallelarum; aut vtraque parallela; ad reliquum Quadrantis arcum magis à latere diſtantem, maiorem habet rationem in circulo interiori, quam in exteriori.

Sint duo Quadrantes ex eodem centro A. deſcripti IFB. externus, LNO. internus, quorum commune latus AB. ſecans externum in B. internum in O. cui parallelæ ſint DC. FE. ſecantes reliquum latus in C. E. internũ circulum in M. N. externum in D. F. ſintque reliqui Quadrantis arcus magis à latere AB. diſtantes, interior NL. exterior FI. Dico ma-

iorem eſſe rationem ON. ad NL. quam BF. ad FI. Item maiorem rationem MN. ad NL. quam DF. ad FI. Ducatur AN. quæ producta ſecet externum circulum in G. erunt arcus NL. GI. proportione æquales, maior autem eſt FI. quam GI. Igitur arcus FI.
33. 6. proportione maior eſt, quam NL. ſed & ON. maior eſt pro-

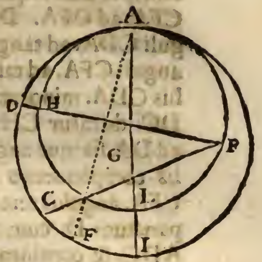


Lemm. 1. huius. portione quam BF. & MN. proportione maior, quam DF. Quare cum maior ſit proportione ON. quam BF. & NL. minor etiam proportione quam FI. maior erit ratio ON. ad
8. 5. NL. quam BF. ad FI. Item cum maior ſit proportione MN.
Lemm. 1. huius. quam DF. & NL. minor proportione quam FI. eodem modo maior erit ratio MN. ad NL. quam DF. ad FI. Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

SI duo circuli ſeſe interius contingant; duæ rectæ ex puncto vtriuſuis peripheriæ, in quo non ſit contactus, circulum vtrumque ſecantes, arcus comprævhendunt, quorum interior ad arcum inter compræhenſum, & extremitatem cõmunis diametri puncto contactus oppoſitam maiorem habet rationem quam exterior.

Duo circuli ADI. AHL. contingant ſeſe interius in puncto A. ſitque interior AHL. exterior ADI. ac primum ex puncto B. in interiori circulo, ducantur duæ rectæ BC. BD. ſecantes interiorem circulum in punctis G. H exteriorem in punctis C. D. ſitque communis diameter ALI. ſecans interiorem



riorem circulum in L. exteriorem in I. erit arcus HG. compræhenſus inter rectas BD. BG. in interiori circulo, & DC. in exteriori; & arcus GL. contentus inter arcum HG. & punctum, ſeu extremitatem diametri L. puncto contactus oppoſitam: arcus verò CI. contentus inter DC. & ſimilem extremitatem in circulo exteriori. Dico maiorem eſſe rationem HG. ad GL. quam DC. ad CI. Ducatur per punctum G. recta AG. quæ producta ſecet exteriorem circulum in puncto F. Erunt arcus GL. FI. proportione æquales, maior autem eſt arcus CI. arcu FI. Igitur proportione maior eſt arcus CI. quam arcus GL. Sed & proportione maior eſt arcus HG. arcu DC. Igitur cum maior ſit proportione HG. quam DC. maior erit ratio HG. ad GL. quam DC. ad GL. & cum maior ſit proportione CI. quam GL. maior erit ratio DC. ad GL. quam DC. ad CI. Igitur maior eſt ratio HG. ad GL. quam DC. ad CI. Schol. 22. 3. & pappus Lemm. ad 8. 4. collectionũ Lemm. 2. 2. huius. 8. 5. 8. 5.

Idem eodem modo demonſtrabitur ſi punctum B. ſumatur in exteriori circulo. Quare ſi duo circuli ſeſe interius contingant &c. Quod erat demonſtrandum.

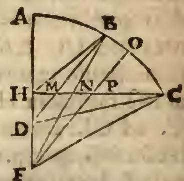
THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

SI fuerint quatuor anguli proportionales ſinguli minores recto, ac primus maior ſecundo, ac tertio; maior erit ratio tangentis primi, ad tangentem ſecundi, quàm tangentis tertij, ad tangentem quarti.

Sint duo anguli quicumque minores recto CDA. DBA. item duo alij quicumque CFA. OFA. ſitque HDC. maior

tam

tam ipſo BDA. quam CFA. & ſit vt CDA. ad BDA. ita CFA. ad OFA. Dico maiorem eſſe rationem tangentis anguli CDA. ad tangentem anguli BDA. quam ſit tangentis anguli CFA. ad tangentem anguli OFA. Contineat angulus CDA. minorem BDA. & ex quolibet puncto C. rectæ DC. ducatur CH. perpendicularis ad DA. fiatque angulus HCF. æqualis complemento ipſis CFA. erit CFA. angulus tertius, qui cadet ſub punctum D. cum ſit minor quàm ADC. & contineat angulum quartum minorem AFO. & diſtantia FC. deſcribatur circulus FCA. ſecans priores lineas in C. O. B. A. & connectatur FB. quæ ſecet CH. in N. & DB. ſecet eandem in M. Item FO. ſecet eandem in P. cadet punctum O. inter B. & C. & punctum P. inter N. & C. Nam cum triangula CFD. BFD. habeāt circa angulos inæquales CFD. BFD. duo latera CF. FD. duobus lateribus BF. FD. æqualia vtrūque vtrique, in eodem vero triangulo inæqualia; maior erit ratio CFA. ad BFA. quàm CDA. ad BDA. ideoque habebit angulus CFA. ad aliquem angulum maiorem ipſo CFB. eandem rationem, quàm CDA. ad BDA. Igitur angulus AFO. ad quem eandem proportionem habet, eſt maior, quàm AFB. cadet igitur punctum O. inter B. & C. & punctum P. inter N. & C. Iam dicta perpendicularis CH. erit tangens tàm anguli CFA. quàm anguli CDA. recta NB. tangens anguli BFA. MH. tangens anguli BDA. & PH. tangens anguli OFA. conſtat punctum N. cadere inter M. & C. item oſtenſum eſt punctum P. cadere inter N. & C. quare multo maior eſt PH. quam MH. Igitur maior erit ratio CH. tangentis anguli CDA. ad MH. tangentem anguli BDA. poſito ſinu toto DH. quam CH. tangentis anguli CFA. ad PH. tangentem anguli OFA. poſito ſinu toto FH. Quod erat demonſtrandum.



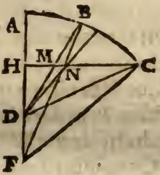
13. aut 17. 2. huius.

THEO-

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

SI fuerint quatuor tangentes proportionales, maiorque prima quam ſecunda & tertia, minor erit ratio primi anguli reſpondentis primæ tangenti ad ſecundum, quam tertij ad quartum.

Sint quatuor tangentes E. G. I. K. ſitque vt E. ad G. ita I. ad K. ſitque E. maior quàm G. maior item quàm I. centro F. deſcribatur circulus ABC. diametro FA. & ſit arcus AC. ſeu angulus AFC. reſpondens tangenti I. & arcus AB. ſeu angulus AFB. reſpondens tangenti K. hinc ducta CH. ad FA. perpendiculari, primi anguli cō-plementum ſit HCD. erit ADC. primus angulus, & cum angulus ADC.



ſit maior, quàm HFC. (nam maioris anguli maior tangens) cadet punctum D. inter H. & F. (ſi enim caderet in F. eſſet angulo AFC. æqualis, ſi infra minor) & connectatur DB. quæ ſecet HC. in M. & ducatur DN. ſecans HC. in N. erit punctum M. inter H. & N. & angulus HDN. angulus ſecundus reſpondens ipſi G. Nam cum CH. ſit tangens anguli AFC. & NH. tangens anguli BFA. item CH. tangens anguli HDC. Nam eſt, vt I. ad K. ita CH. ad HN. ſed vt I. ad K. ita E. ad G. & vt E. ad G. ita CH. tangens anguli HDC. ad HN. (vtrobique enim eſt proportio æqualitatis) tangentem anguli HDN. Dico minorem eſſe rationem CDH. ad NDH. quàm CFA. ad BFA. Cũ enim in ſuperiori ex 13. & 17. 2. huius oſtenſum ſit, maioré eſſe proportionem anguli CFA. ad BFA. quàm CDH. ad MDH. & CDH. ad MDH. maior ſit ratio, quàm CDH. ad NDH. maior erit proportio anguli tertij CFA. ad angulũ quartũ BFA. quã primi CDH. ad ſecundum NDH. ideoq; minor ratio primi anguli CDH 8. 5.

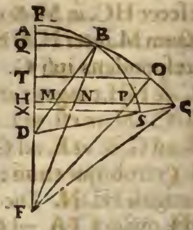
ad

ad ſecundum NDH. quàm tertij CFA. ad quartum BFA. Quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

SI ſint quatuor anguli proportionales, ſitque primus maior ſecundo, ac tertio; minor erit ratio ſinus recti, ac chordæ primi ad chordam, & ſinum ſecundi, quàm ſinus, & chordæ tertij, ad ſinum, & chordam quarti.

Sint quatuor anguli proportionales diſpoſiti, vt in figura penultima huius, ſitque vt CDH. ad MDH. ita CFA. ad OFA. eodem modo quo vigeſima ſexta huius oſtendemus punctum P. cadere inter N. & C. Centro D. diſtantia DB. deſcribatur arcus RBS. ſecans diametrum FA. in R. & DC. in S. Cum DB. ſit minor quàm DC. erit DS. illi æqualis minor quàm DC. cadet punctum S. inter D. & C. Ducantur ſinus BQ. OT. SX. erit CH. ſinus rectus anguli CFA. & BQ. ſinus rectus anguli BFA. reſpectu ſinus totius FA. item SX. ſinus rectus arcus RS. ſeu anguli CDA. & BQ. ſinus rectus arcus BR. ſeu anguli BDA. reſpectu ſinus totius DB. ſeu DC. & OT. ſinus rectus anguli OFA. reſpectu ſinus totius FA. Cùm minor ſit SX. quàm CH. minor erit ratio SX. ſinus anguli primi CDA. ad BQ. ſinum rectum



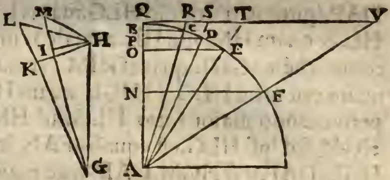
anguli ſecundi BDA. quàm CH. ſinus recti anguli tertij CFA. ad BQ. ſinum rectum anguli BDA. qui cum minor ſit quàm OT. multò minor erit ratio SX. ad BQ. quàm CH. ad OT. ſinum quartum anguli OCR. Quod erat oſtendendum.

Idem oſtendetur in chordis, ſi enim propoſiti ſint quatuor arcus proportionales, accipiantur eorum dimidij: oſtendetur minorem eſſe rationem ſinus primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum: vt verò dimidium ad dimidium, ita totum ad totũ, quare minor erit ratio dupli ſinus, id eſt chordæ primæ ad ſecundam quàm tertiæ ad quartam. 15. 5.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

SI fuerint quatuor ſinus proportionales in quadrante, maiorq́; primus quàm ſecundum, ac tertius; maior erit ratio anguli reſpondentis primo ſinui ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

Sint in quadrante cuius centrum A. quatuor ſinus FN. EO. DP. CB. proportionales, ac quidem FN. maior quam EO. aut DP. quibus reſpondeāt arcus FQ. EQ. DQ.



CQ. ſeu anguli FAN. EAO. DAP. CAB. Dico maiorem eſſe rationem FAN. ad EAO. quàm DAP. Ad CAB. Ad lineã GH. quamcunque fiat angulus HGI. æqualis angulo DAQ. Et ex H. in lineam GI. ducatur perpendicularis HI. Item ad eandem lineam fiat angulus HGK. æqualis angulo CAQ. & demittatur HK. perpendicularis ad GK. Rurſus fiat angulus IHL. æqualis angulo NFA. complementi anguli FAN. ſecetque HI. productam GI. in L. Denique ad H. fiat angulus KHM. æqualis angulo OEA. complementi anguli EAO. ſecetque recta HM. productam GK. in M. erit reliquus HLI. æqualis ipſi FAN. & HMK. æqualis EAO.

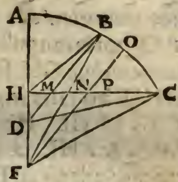
ideoque æquiangula triangula IHL.NFA. & KHM. OEA. ac proinde ſimilia. Cumque æqui angula ſint triangula rectangula HIG.DPA.& HKG.CBA. (Nam præter angulos rectos ad K. I. P. B. ſumpti ſunt anguli æquales HGI. ipſi
32. 1. DAP.& KGK. ipſi CAB. quare & reliqui anguli reliquis sũt
4. 6. æquales) erit vt IH. ad HG. ita PD. ad DA. & vt HG. ad
15. defin. HK. ita DA. id eſt AC. ad CB. igitur, ex æqualitate, erit vt IH.ad HK.ita DP.ad CB.ſed vt DP.ad CB. ita eſt ex hypotheſi FN.ad EO. vt igitur IH.ad HK. ita FN. ad EO. Cùm ergo ſit vt HL.ad IH.ita AF.ad FN.& vt IH.ad HK.ita FN. ad EO. & vt KH. ad HM ita EO. ad EA. erit ex æquali vt HL.ad HM.ita AF.ad EA. æquales autem ſunt AF.EA. igitur etiam æquales ſunt HL.& HM. Cum igitur triangula GHL. GHM. habeant duo latera GH. HL. in eodem verò triangulo inæqualia (nam angulus HLG.oſtenſus eſt ęqualis ipſi FAN. & HGL. ipſi DAP. maior autem FAN. quam
19. 1. DAP.igitur in triangulo HLG.maius latus HG.quam latus HL. & quam HM. ipſi HL. æquale) minorque ſit angulus compræhẽſus GHL.quàm GHM. (vt paulò poſt oſtendetur)
10.2.huius. maior erit ratio HLG.ad HGL. quam HMG. ad HGM. & permutando maior ratio HLG. ad HMG. quam HGL. ad HGM.ſed ipſi HLG.eſt ęqualis FAN.ipſi HMG. EAO. ipſi HGL. DAP. ipſi HGM. CAB. ergo maior eſt ratio FAN. ad EAO. quam DAP. ad CAB. ſeu maior ratio arcus FQ. ad arcum EQ. quam arcus DQ. ad arcum CQ. Quod erat propoſitum. Quod verò GHL.ſit minor quàm GHM. probatur, quia cum angulus IGH. ſit maior angulo KGH. erit eius complementum GHI. minus complemento alterius GHK. & cadet perpendicularis HK.ſupra HI.eritque LHK. angulus pars ipſius LHI.item cum angulus HLI.poſitus ſit maior quàm HMK. erit eius complementum IHL. minus quàm KHM. Quare cum LHK. ſit minor quàm LHI. & LHI. minor quàm MHK. multò minor erit LHK. pars ipſius LHI. quàm MHK. Cadet igitur HM.ſupra HL. ideoque angulus LHG.angulo MHG.minor erit.

THEO-

THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

SI fuerint quatuor anguli proportionales ſinguli minores recto, ac primus maior ſecundo, ac tertio; maior erit ratio ſecantis primi, ad ſecantem ſecundi, quàm ſecantis tertij, ad ſecantem quarti.

Sint omnia, quæ in 26. theoremate huius, erit FC. ſecans anguli CFA. & PF. ſecans anguli PFA. reſpectu ſinus totius FH. item CD. ſecans anguli CDA. & MD. ſecans anguli MDA. poſito ſinu toto DH. Dico maiorem eſſe rationem CD. ad DM. quam CF. ad PF. Quoniam minor eſt DB. quã DC. eodemq; minor quam FA. id eſt quam FB. aut FC. & æquales ſunt FB. FC. à centro ad circumferentiam, minor erit ratio DB. FB. quam DC. ad FC. & permutando minor DB. ad DC. quam FB. ad FC. Rurſus cum in triangulo FHN. angulus FHN. ſit rectus erit FNH. acutus, & MNB. obtuſus ideoque MB. maior quam BN. Quare cum minor ſit ratio primę quantitatis DB. ad ſecundam DC. quam tertiæ FB. ad quartam FC. ſitque prima DB. minor tertia FB. ſi ex prima, & tertia demantur ex illa maior MB. ex iſta minor NB. minor erit ratio MD. reſidui primæ quantitatis, ad ſecundum DC. quam NF. reſidui tertiæ quantitatis, ad quartam FC. & conuertendo, maior ratio DC. ad MD. quam FC. ad NF. at vero FC. ad NF. maior eſt quam FC. ad FP. (nam cum in triangulo rectangulo FHN. angulus FNH. ſit acutus, erit FNP. obtuſus, ideoque FPN. acutus, & FP. maior quam FN.) Igitur ratio DC. ad MD. maior eſt quam CF. ad FP. Quod erat &c.



7. 3.
32. 1. & 13. 1.
19. 1.
6. 1. huius.
8. 5.
19. 1.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXI.

SI ſint quatuor ſecantes proportionales, maiorque prima quam ſecunda, ac tertia; minor erit ratio primi anguli reſpondentis primæ ſecanti ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

Vide figurã 29. huius. Sint quatuor ſecantes proportionales in quadrante BN. cuius centrũ A. videlicet AV. AT. AS. AR. ſitque AV. maior quàm AT. aut AS. quibus reſpondeant arcus QF. QE. QD. QC. ſeu anguli FAQ. EAQ. DAQ. CAQ. Dico minorem eſſe rationem anguli FAQ. ad angulum EAQ. quàm anguli DAQ. ad angulum CAQ. Ad lineam quamcunque GH. fiat angulus GHI. æqualis angulo FAB. & IHM. æqualis angulo EAQ. & ducatur GIM. perpendicularis ad HI. Hinc fiat angulus GHK. æqualis angulo DAQ. & KHL. æqualis angulo CAQ. & ducatur GKL. perpendicularis ad HK. erunt HG. HM. ſecantes angulorum FAB. EAB. & HG. HL. ſecantes angulorum DAB. CAB. illæ reſpectu ſinus totius HI. iſtæ reſpectu ſinus totius HK. erit igitur vt GH. ad HM. ita AV. ad AT. & vt GH. ad HL. ita AS. ad AR. cum igitur ſit vt GH. ad HM. ita AV. ad AT. & vt AV. ad AT. ita ex hypotheſi AS. ad AR. & vt AS. ad AR. ita GH. ad HL. erit vt GH. ad HM. ita GH. ad HL. æquales igitur ſunt HM. HL. ſed & maiores ſunt anguli GHI. IHM. id eſt FAQ. EAQ. angulis GHK. KHL. (nam maioribus ſecantibus maiores reſpondent anguli) maius eſt latus GH. latere HM. (nam anguli IHG. maioris quam IHM. minus eſt complementum HGI. complemẽto HMI. ideoque minus latus HM. latere HG. & HL. quam HG.) Quare cum duo triangula GHM. GHL. habeant duo latera GH. HM. duobus lateribus GH. HL. æqualia vtrumque, vtrique, in eodem vero triangulo inæqualia, anguluſque comprænhenſus GHM. maior ſit comprænhenſo GHL. ex quibus in oppoſitas baſes perpendiculares demiſſæ ſunt HI.

19. 1.

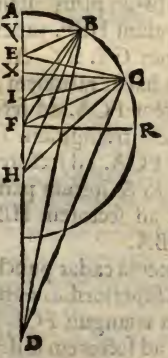
HK.

HK. erit, per 14. ſecundi huius, minor ratio anguli GHI. ad angulum IHM. id eſt FAB. EAB. quam anguli GHK. ad angulum KHL. id eſt quam DAQ. ad CAQ. Quod erat demonſtrandum. 14. 2. huius.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXII.

SI à puncto in quo ſemidiameter quadrantis peripheriam ſecat duo arcus inæquales accipiantur, ad quos, ex quibuslibet punctis eiuſdem diametri productæ duæ rectæ ducantur, facientes duos ſectores: ſectores quos rectæ ductæ ex punctis remotioribus ab extremitate diametri cum arcubus quadrantis efficiunt, minorem habent inter ſe rationem, quàm quos efficiunt ductæ ex punctis propinquioribus, ſi maiores cum minoribus comparentur.

Sit Quadrans circuli FAK. cuius centrum F. ſemidiameter FA. ſecans peripheriam in A. puncto, a quo ſumantur in Quadrante duo arcus maior AC. minor AB. Hinc in diametro AF. producta ſumantur quotlibet puncta D. H. extra quadrantem, & I. E. intra quadrantem, ac ducantur tam ex centro, quam ex ſingulis punctis, duæ rectæ ad puncta B. C. Dico ſectorem DCA. ad ſectorem DBA. minorem habere rationem,



tionem, quàm ſectorem HCA. ad ſectorem HBA. & hunc minorem, quam ſectorem FCA. ad ſectorem FBA. Denique hunc minorem quam quemlibet ſuperiorem; Superiores autem, eo minorem, quo magis puncta IE à puncto A. remouentur. Ducantur ſinus recti BY. CX. Quoniam triangula DCF. DBF. eandem baſim habent DF erunt
1. 6. inter ſe vt altitudines. CX. BY. Eodem modo cum triangula HCF. HBF. habeant eandem baſim HF. erunt vt eædem altitudines CX. BY. Quare erit vt triangulum DCF. ad triangulum DBF. ita triangulum HCF. ad triangulum HBF. maius autem eſt triangulum DCF triangulo DBF (vt ad finē huius oſtendemus) & triangulo HCF. & ſector FCA. maior ſectore FBA. Quare ſi ad primum triangulum. DCF. & ad tertium HCF. addatur eadem quantitas, nimirum ſector FCA. componētur duo ſectores DCA. HCA. ſi vero ad ſecundum triangulum DBF. & quartum HBF. addatur ſector FBA. conflabuntur ſectores DBA. HBA.
10. 1. hui. Igitur, per decimam propoſitionem primi huius, minor erit ratio ſectoris DCA. ad ſectorem DBA. quam ſectoris HCA. ad ſectorem HBA.

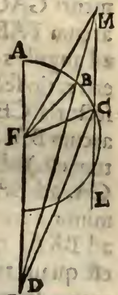
Rurſus, vt prius, oſtendemus eſſe vt triangulum HCF. ad
1. 6. triangulum HBF. ſuper eadem baſi HF. conſtituta, ita al-
corol. 1. titudines CX. BY. At vero ſinus CX. ad ſinum BY. mi-
28. 1. huius. norem habet rationem, quam arcus CA ad arcum BA. id
33. 6. eſt, ſector FCA. ad ſectorem FBA. Igitur minorem habet rationem triangulum HCF. ad triangulum HBF. quam ſector FCA. ad ſectorem FBA. & permutando, ac componendo & iterum permutando, minor erit ratio ſectoris HCA. ad ſectorem HBA. quam ſectoris FCA. ad ſectorem FBA.

Præterea cadat punctum I inter F. & A. Eodem modo quo in ſuperioribus partibus, oſtendemus minorem eſſe rationem trianguli FCI. ad triangulum FBI. quam ſectoris FCA. ad ſectorem FBA. cum igitur maior ſit ratio totius FCA. ad totum FBA. quam partis FCI. ad partem FBI.

reliqui

reliqui ſectoris ICA. ad reliquum IBA. maior erit ratio, 33. 5.
quam totius FCA. ad totum FBA.

Denique ſumpto puncto E inter I. & A. cum oſtenſum ſit ſæpe ſuperius, minorem eſſe rationem trianguli ECI. ad triangulum EBI. quam ſectoris FCA. ad ſectorem FBA. & in tertia parte huius demoſtratum ſit, minorem eſſe rationem ſectoris FCA. ad ſectorem FBA. quam ſectoris ICA. ad ſectorem IBA. minor erit ratio trianguli ECI. ad triangulum EBI. quam ſectoris ICA. ad ſectorem IBA. Cum igitur maior ſit ratio totius ſectoris ICA. ad totum ſectorem IBA. quam partis ECI. ad partem EBI. erit reliqui ſectoris ECA. ad reliquum EBA. maior ratio quam totius ICA. ad totum IBA. Quod erat demonſtrandum Quod autem triangulum DCF. ſit maius triangulo DBF. perſpicuum eſt; Ducta enim ipſi AD. parallela LCM. producatur DB. dum concurrat in M. & ducatur FM. perſpicuum eſt quod punctum M. cadet extra circulũ eritq; triangulum DBF pars trianguli DMF ideoque minus, æquale autem eſt triãgulum DMF triangulo DCF. 38. 1.
minus igitur eſt triangulum FBD. triangulo DCF.



SCHOLIVM.

Sectorem hic vocamus, improprio nomine, triangulum ex duobus rectis, & circulari conſtitutum, qualis eſt figura DCA. duabus rectis DC. DA. & tertia qualibet circulari AC terminata, eo quod ſimilitudine verum ſectorem referat, ab Euclide lib. 3. definitione nona, deſcriptum, qui angulum rectilineum, aut in centro, aut in peripheria circuli ſubtendentis conſtitutum habet; qualis eſt hic figura LCB, cuius rei lectorem ad monitum eſſe voluimus, ne ὁμωνυμία ambiguitatem pariat.

THEO.

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIII.

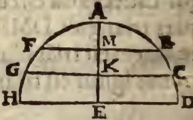
Segmentorum in ſemicirculo, maioris ad minus maior eſt ratio, quam arcus maioris ad minorem.

Sit circulus ABC. cuius centrum E. diameter HD. ac in ſemicirculo HAD. ſumantur duo ſegmenta FAB. GAC. illud minus, hoc maius. Dico maiorem eſſe rationem ſegmenti GAC. ad ſegmentum FAB. quam arcus GAC. ad arcum FAB. Secent duæ chordæ BF. CG. diametrum AE. ad angulos rectam in punctis M, K. & ducatur KB. maior erit ratio ſectoris ſeu figuræ CKA. ad ſectorem BKA. quam ſectoris CEA. ad ſectorem BEA. id eſt quam arcus CA. ad arcum BA. (hoc enim in ſuperiori propoſitione demonſtratum eſt.) ideoq; minor eſt ratio arcus CA. ad BA. quam CKA. ad BKA. minor autem eſt etiam ratio CKA. ad BKA. quam CKA. ad BMA. id eſt quam totius ſegmenti CAG. ad totum ſegmentum BAF. Igitur minor eſt ratio arcus CA. ad arcum BA. id eſt dupli CAG. ad duplum BAF. quam ſegmenti CAG. ad ſegmentum BAF. Eodem modo ducta ſemidiametro HED. oſtendemus minorem eſſe rationem arcus ſemicirculi DAH. ad arcum CAG. quam ſegmenti ſeu ſemicirculi DAH. ad ſegmentum CAG.

22. 2. huius.

8. 5.

15. 5.



THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXIV.

In omni triangulo rectangulo inæqualium laterum lateris minoris ad baſim minor eſt ratio; quam baſis ad vtrumque latus; & maioris lateris

ris ad baſim maior eſt ratio quam baſis ad vtrumq; latus.

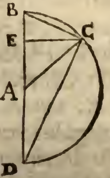
Sit triangulum rectangulum BCD. cuius baſis BD. latus minus BC. maius CD. Dico minorem eſſe rationem CB. ad BD. quam BD. ad vtrumq; BC. CD. & maiorem eſſe rationem CD. ad BD. quam BD. ad vtrumque CB. CD. Ex angulo recto C. in baſim demittatur perpendicularis CE. erit BE. ſegmentum minus ſegmento ED. ſed & EC. minor eſt quam ED. (eſt enim vt BC. minor ad CD. maiorem ita CE. minor ad ED. maiorem) addita ergo communi EB. maior erit tota DB. quam CE. EB. ſimul. Igitur minor eſt ratio CB. ad BD. lateris ſcilicet minoris ad baſim, quam CB. ad BE. EC. ſimul, id eſt quam baſis DB. ad CB. DC. vtrumq; latus ſimul. Rurſus cum maior ſit DC. quam CB. id eſt CE. quam EB. addita communi ED. maiores erunt DE. EC. quam tota DB. Igitur maior eſt ratio CD. ad BD. lateris ſcilicet maioris ad baſim quam CD. ad DE. EC. ſimul id eſt DB. baſis ad DC. CB. vtrumq; latus ſimul. Quod erit demonſtrandum.

Schol. in 4. 47. 1.

8. 6.

2. 5.

8. 6.

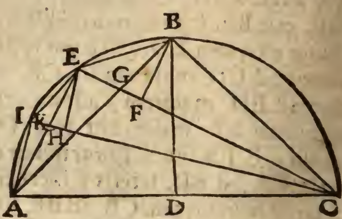


THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXV.

DVarum rectarum, quæ in ſemicirculo angulum rectum continent maximę ſunt quę inter ſe æquales, inæqualium vero quæ æqualibus viciniores, maiores ſunt quam quæ remotiores.

In ſemicirculo ABC. cuius centrum D. ducta diametro AC. & ſemidiametro DB. ad eam perpendiculari: Ducãtur AB. CB. item AE. EC. & AI. IC. in ſemicirculo, quarum

illæ primis AB. CB. ſint viciniores, iſtæ remotiores. Cum
in triangulis ADB. CDB. duo latera AD. DB. duobus CD.
DB. æqualia ſint, & anguli ad D. compræhenſi recti, ideo-
4. 1. que æquales, æquales erunt baſes AB. CB. Dico maiores
eſſe AB. CB. ſimul, duabus AE. CE. ſimul & ipſas AE CE.
ipſis AI. CI. ſimul eſſe maiores. Ducatur enim perpendi-
cularis BF. in rectam CE. & connectatur BE. EA. ſecetque
recta CE. rectam AB.
in G. Item ducatur
perpendicularis EH.
in rectam IC. & con-
nectātur EI. IA. ſecet-
que recta CI. rectam



32. 1. EA. in K. Quoniam
AGC. angulus æqua-
lis eſt duobus interio-
ribꝰ, & oppoſitis GBC.
31. 3. BCG. eſtque GBC.
13. 1. rectus, erit AGC. obtuſus, ac proinde BGC. acutus, cadet
19. 1. igitur BF. perpendicularis inter puncta GC. eſtque BG. ſub-
tendens rectum angulum F. maior ipſa BF. Iam in triangu-
lo BFE. Quoniam angulus BEC. eſt ſemirectus (inſiſtit e-
20. 3. nim ad circumferentiam quadranti BC.) & angulus ad F.
5. 1. rectus, erit etiam FBE. ſemirectus: æqualia igitur ſunt late-
ra FE. FB. Cum igitur latus CB. ſubtendens rectum F. ſit
19. 1. 4. pron. maius latere CF. ſi æqualia addantur BF. FE. maior erit
CB. BF. ſimul quam tota CF. FE. multo igitur maior erit
CB. BG. quam CE. cum BG. oſtenſa ſit maior quam BF.
Cum vero AG. ſubtendens angulum rectum AEG. ſit maior
quam EA. ſubtendente acutum EGA. ſi ad CB. BG. quæ
ſunt maiores quã CE. addatur AG. maior, & ad CE. adda-
tur EA. minor erunt CB. BG. GA. id eſt duæ rectæ CB. BA.
ſimul maiores duabus rectis CE. EA. Quod erat primo de-
monſtrandum. Rurſus eodem modo quo ſupra oſtendetur
cadere perpendicularẽ EH. inter C. & K. & quod angulus

AKC.

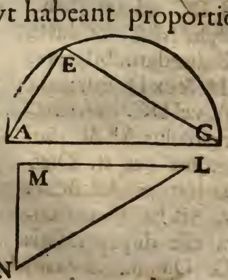
AKC. ſit obtuſus, ac proinde EKH. acutus, quare maior erit EK. quam EH. Rurſus in triangulo rectangulo EHI. angulus EIH. ſeu EIC. innixus arcui EC. (qui maior eſt quadrante) eſt maior ſemirecto, minor igitur eſt IEH. ſemirecto maius igitur eſt latus EH. latere IH. Nunc eadem prorſus ratione qua ſuperius, oſtendemus, cum CE. ſit maior quam CH. ſubtendens ſcilicet angulum rectum ad H. & maior etiam oſtenſa ſit EH. quam HI. maiores eſſe CE. EH. ſimul quam CH. HI. quare multo maiores erunt CE. EK. ſimul (cum EK. ſit maior quæ EH.) quam CH. HI. ſi igitur inæqualibus CE. EK. ſimul, & CH. HI. ſimul, addantur inæquales, illis maior KA. ſubtendens angulum rectum KIA. iſtis minor IA. ſubtendens angulum acutum in eodem triangulo KIA. erunt rectæ CE. EK. KA. id eſt duæ CE. EA. ſimul, tribus CH. HI. IA. ſimul id eſt duabus CI. IA. maiores. Quod quærebamus demonſtrare.

20. 3.
32. 1.
19. 1.
19. 1.
31. 3.

Atque ita deinceps oſtendetur quo linea ex puncto C. ad circumferentiam BA. ducta erit remotior à linea CB. eſſe ſimul cum reliqua ad A. ducta, minorem viciniori, vt CI. IA. minores ſunt quam CE. EA.

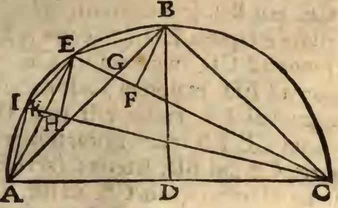
PROBLEMA I. PROPOS. XXXVI.

IN ſemicirculo ex punctis extremis diametri chordas ita inflectere vt habeant proportionem datam.



Sit datus ſemicirculus AEC. cuius diameter AC. eiuſque extrema A. C. & proportio data rectæ LM. ad MN. oportet duas chordas ex AC. ita inflectere vt habeant proportionem LM. ad MN. Componatur MN. cum recta ML.

illæ primis AB. CB. ſint viciniores, iſtæ remotiores. Cum in triangulis ADB. CDB. duo latera AD. DB. duobus CD. DB. æqualia ſint, & anguli ad D. compræhenſi recti, ideo-
4. 1. que æquales, æquales erunt baſes AB. CB. Dico maiores eſſe AB. CB. ſimul, duabus AE. CE. ſimul & ipſas AE CE. ipſis AI. CI. ſimul eſſe maiores. Ducatur enim perpendicularis BF. in rectam CE. & connectatur BE. EA. ſecetque recta CE. rectam AB. in G. Item ducatur perpendicularis EH. in rectam IC. & connectatur EI. IA. ſecetque recta CI. rectam
32. 1. EA. in K. Quoniam AGC. angulus æqualis eſt duobus interiorib⁹, & oppoſitis GBC.
31. 3. BCG. eſtque GBC.



13. 1. rectus, erit AGC. obtuſus, ac proinde BGC. acutus, cadet
19. 1. igitur BF. perpendicularis inter puncta GC. eſtque BG. ſubtendens rectum angulum F. maior ipſa BF. Iam in triangulo BFE. Quoniam angulus BEC. eſt ſemirectus (inſiſtit e-
20. 3. nim ad circumferentiam quadranti BC.) & angulus ad F.
5. 1. rectus, erit etiam FBE. ſemirectus: æqualia igitur ſunt late-
19. 1. ra FE. FB. Cum igitur latus CB. ſubtendens rectum F. ſit
4. pron. maius latere CF. ſi æqualia addantur BF. FE. maior erit CB. BF. ſimul quam tota CF. FE. multo igitur maior erit CB. BG. quam CE. cum BG. oſtenſa ſit maior quam BF. Cum vero AG. ſubtendens angulum rectum AEG. ſit maior quam EA. ſubtendente acutum EGA. ſi ad CB. BG. quæ ſunt maiores quã CE. addatur AG. maior, & ad CE. addatur EA. minor erunt CB. BG. GA. id eſt duæ rectæ CB. BA. ſimul maiores duabus rectis CE. EA. Quod erat primo demonſtrandum. Rurſus eodem modo quo ſupra oſtendetur cadere perpendicularẽ EH. inter C. & K. & quod angulus

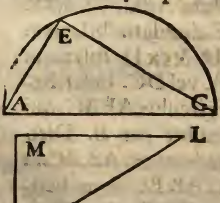
AKC.

AKC. ſit obtuſus, ac proinde EKH. acutus, quare maior
erit EK. quam EH. Rurſus in triangulo rectangulo EHI. an-
gulus EIH. ſeu EIC. innixus arcui EC. (qui maior eſt qua- 20. 3.
drante) eſt maior ſemirecto, minor igitur eſt IEH. ſemire- 32. 1.
cto maius igitur eſt latus EH. latere IH. Nunc eadem pror- 19. 1.
ſus ratione qua ſuperius, oſtendemus, cum CE. ſit maior
quam CH. ſubtendens ſcilicet angulum rectum ad H. & ma-
ior etiam oſtenſa ſit EH. quam HI. maiores eſſe CE. EH. ſi-
mul quam CH. HI. quare multo maiores erunt CE. EK. ſi-
mul (cum EK. ſit maior quæ EH.) quam CH. HI. ſi igitur 19. 1.
inæqualibus CE. EK. ſimul, & CH. HI. ſimul, addantur
inæquales, illis maior KA. ſubtendens angulum rectum 31. 3.
KIA. iſtis minor IA. ſubtendens angulum acutum in eodem
triangulo KIA. erunt rectæ CE. EK. KA. id eſt duæ CE. EA.
ſimul, tribus CH. HI. IA. ſimul id eſt duabus CI. IA. ma-
iores. Quod quærebamus demonſtrare.

Atque ita deinceps oſtendetur quo linea ex puncto C. ad circumferentiam BA. ducta erit remotior à linea CB. eſſe ſimul cum reliqua ad A. ducta, minorem viciniori, vt CI. IA. minores ſunt quam CE. EA.

PROBLEMA I. PROPOS. XXXVI.

IN ſemicirculo ex punctis extremis diametri chordas ita inflectere vt habeant proportionem datam.



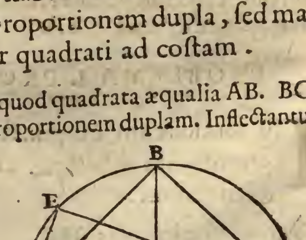
Sit datus ſemicirculus AEC. cuius diameter AC. eiuſque extrema A. C. & proportio data rectæ LM. ad MN. oportet duas chordas ex AC. ita inflectere vt habeant proportionem LM. ad MN. Componatur MN. cum recta ML.

in angulum rectum & ducatur LN. & fiat vt LN. ad NM. ita CA. ad AE. & aptetur AE. adcirculum AB. connectaturque CE. Dico eſſe vt LM. ad MN. ita CE. ad EA. Quoniam æqualis eſt angulus AEC. angulo NML. rectus, recto, in triangulis AEC. NML. & circa angulos EAC. MNL. latera proportionalia, ex hypotheſi, eſt enim vt LN. ad NM. ita CA. ad AE. & quilibet reliquorum angulorum ECA. MLN. minor recto æquales erunt anguli CAE.
7. 6. LNM. ſed & æquales ſunt recti ad M. & E. igitur æquales
32. 1. ſunt reliqui ad C. & L. erit igitur vt LM. ad MN. ita CE. ad
4. 6. EA. Quod demonſtrandum erat.

THEOREMA XXXVI. PROPOS. XXXVII.

SI ſint duo quadrata alterius quadrati dupla, ſi quidem ſint inter ſe æqualia, habebunt eorum latera ad iſtius latus proportionem duplam, ſi inæqualia habebunt eorum latera ad iſtius latus minorem proportionem dupla, ſed maiorem quam diameter quadrati ad coſtam.

Sit quadratum FG. ad quod quadrata æqualia AB. BC. ſimul ſumpta habeant proportionem duplam. Inflectantur AB. BC. ad angulum rectum ABC. & ducta AC. diuidatur bifariam in D. & ex D. diſtantia DA. vel DC. deſcribatur circulus AEBC. qui



Schol. 31.3. tranſibit per B. Dico quadratorũ, AB. BC. latera AB. BC. ſimul ſumpta eſſe dupla lateris EG. Quoniam æqualia ſunt AB. CB. & angulus ABC. rectus,

ctus, conſtat AB. BC. eſſe latera quadrati, & AC. eius diametrum. Rurſus quoniam æqualia ſunt quadrata AB. CB. erunt AB. CB. quadrata ſimul dupla ipſius AB. ſed ponuntur etiam dupla ipſius FG. æqualia igitur ſunt quadrata FG. AB. & æqualia latera FG. AB. Quoniam verò æqualia ſunt quadrata AB. CB. æqualia igitur ſunt latera AB. CB. igitur AB. BC. ſunt ipſius AB. id eſt FG. illi æqualis duplicia. 7. Pronunc.

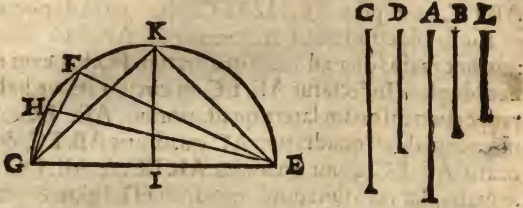
Rurſus ſint duo quadrata inæqualia AE. EC. illud minus, hoc maius quæ ad idem quadratum FG. habeant rationem duplam Inflectãtur AE. EC. in circulo ita vt habeant proportionem quam latera quadratorum AE. EC. Quoniam æquale eſt quadratum AC. quadratis AB. BC. & quadratis AE. EC. erunt quadrata AB. BC. & AE. EC. ſimul æqualia, illa verò ſunt dupla quadrati FG. Igitur & iſta ſunt dupla quadrati FG. datis æqualia, quorum latera AE. EC. cum maiora ſint quam AC. diameter quadrati, & minora quam AB. BC. (quæ ad AB. id eſt FG. habent rationem duplam) vt penultima huius oſtenſum eſt; ideo laterum AE. EC. ad latus FG. maior erit ratio, quam diametri quadrati AC. ad coſtam AB. ſed minor quam dupla. Quod probandum erat. Præced. prop. 47. 1. 20. 1. Penult. huius.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XXXVIII.

SI duo quadrata inæqualia ſimul dupla ſint alterius quadrati, & alia duo inæqualia ſimul etiam dupla eiuſdem quadrati, habeat autem ex duobus prioribus quadratis æqualibus latus maioris, ad latus minoris maiorem rationem, quam ex duobus poſterioribus latus maioris ad latus minoris; habebunt latera priorum ſimul ad latus alterius cuius quadrata ſunt dupla minorem rationem, quã latera poſteriorum ſimul ad idem quadratum.

Sint

Sint duo quadrata inæqualia A. maius B. minus quæ ſimul ſint dupla quadrati L. Item alia duo C. Maius D. minus ſimul dupla eiuſdem quadrati L. Habeat autē A. quadratum ad B. Quadratum maiorem rationem quam C. quadratum ad quadratum D. Dico latera A. B. ſimul ad latus L. mi-



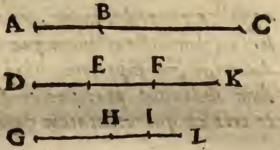
norem habere rationem, quam latera CD. ſimul ad idem latus L. Deſcribatur ſemicirculus GKE. centro I. ex quo educatur ad angulos rectos ſemidiameter IK. & fiat vt
36. huius. A. ad B. ita EG. ad GH. & vt C. ad D. ita EG. ad GF. & connectatur EH. EF. Erunt tam quadrata GH. HE. ſimul, quam GF. FE. ſimul dupla quadrati GK. (vt ad 37. huius oſtenſum eſt). Quare vt quadrata A. B. ad quadratum L. ita quadrata GH. HE. ad quadratum GK. & vt quadrata CD. ad idē quadratum L. ita quadrata GF. FE. ad quadratum GK.
22. 6. vt ergo latera A. B. ad latus L. ita latera GH. HE. ad latus GK. atque vt latera CD. ad latus L. ita latera GF. FE. ad latera GK. Cum verò ponatur vt A. ad B. ita EG. ad GH. & vt C. ad D. ita EG. ad CF. maior autem ſit ratio A. ad B. quam C. ad D. maior erit ratio
10. 5. EG. ad GH. quam EG. ad GF. minor igitur eſt GH. quam
35. huius. GF. ergo minores ſunt GH. HE. ſimul quam GF. FE. ſimul, maior igitur ratio eſt GF. FE. ſimul ad GK. quam GH. HE. ſimul ad GK. quare C. & D. ſimul maiorem rationem habebunt ad L. quam A. B. ſimul ad eandem L.

THEO-

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XXXIX.

SI prima quantitas ad ſecundam; item tertia ad quartam habeat rationem maiorem data, habebunt compoſitæ antecedentes, ad conſequentes ſimul, rationem maiorem data.

Sit ratio data AB. ad BC. ſit autem maior ratio DE. ad EF. quam AB. ad BC. & maior ratio GH. ad HI. quam AB. ad BC. fiat vt AB. ad BC. ita DE. ad EK. quæ maior erit ipſa EF. Item fiat vt AB. ad BC. ita GH. ad HL. quæ etiam maior erit quam HI. Dico maiorem eſſe rationem, ipſorum DE. GH. ſimul, ad ipſas EF. HI. ſimul quam AB. ad BC. Quoniam eſt vt DE. ad EK. ita AB. ad BC. & vt AB. ad BC. ita GH. ad HL. 10. 5.



erit ex æqualitate, vt DE. ad EK. ita GH. ad HL. Igitur DE. GH. ſimul ad EK HL. ſimul ſunt vt DE. ad EK. Ablatis igitur ex conſequentibus duabus quantitatibus, partibus FK. IL. maior erit ratio ipſarum DE GH. ſimul ad minores EF. HI. ſimul quam earumdem DE. GH. ſimul ad maiores EK. HL. ſimul: ſed vt DE. GH. ad EK. HL. ita AB. ad BC. maior igitur eſt ratio ipſarum DE. GH. ſimul ad EF. HI. ſimul quam datæ AB. ad datam BC. 12. 5. 8. 5. Schol. 13. 5.

COROLLARIVM. I.

IDem ſequitur ſi quantitates habeant rationem minorem data, nam etiam compoſitæ antecedentes ad conſequentes ſimul habebunt rationem minorem data.

COROLLARIVM II.

NEque hoc tantum in quatuor, ſed in quotcumque magnitudinibus demonſtratur, ſemper enim oſtendetur compoſitas antecedentes, ad compoſitas conſequentes habere rationem maiorem, aut minorem data.

Atque in duobus hiſce libris vniuerſam proportionum inæqualitatem, quæ ad rem noſtram facere videbatur, complexi ſumus, cuius quidem inſignem vſum, non in hoc opere ſolo, ſed in pluribus alijs quæ luci deſtinamus, vtinam mihi oſtendere, tibi intueri, mi lector, tardiora ſinant fata.

Sequitur tertius liber, in quo proportiones ferme omnes ad æqualitatem reducuntur, ac materiam continent earum præſertim demonſtrationum quæ δεικτικαὶ græcis, noſtris oſtenſiuæ, dicuntur, vt ſuperiores libri ad eas præſertim quæ ad abſurdum abducunt, præcipue conferunt. Hunc ſi perlegeris, forte eris ex quo vtilitatem capias non vulgarem.

VINDICIÆ
PRO VERITATE
SEV ANTAGONISTICON
In C. Mallium Eudoxum.

AD LECTOREM.

ANTAGONISTICON hic inſtruimus, mi Lector, ſed innoxium, ſtylum ſtringimus, ſed incruentum; æmulum aggredimur, non hoſtem, cuius nomen anagrammatiſmo inuertimus, cognomen græco pallio induimus, ne, quod minime volumus, famam eius eleuemus, modeſtia ſaltem ſuperiores futuri, ſi non cauſa. Euomuit ille ante duos annos libellum in quemdam moribus & doctrina præſtantiſſimum Peripateticum, meque longe inferioris tribus Mathematicum; ſed illum pluribus ijsq; longe turpiſſimis, me paucioribus minusque propudioſis contumelijs laceſſit, ac non ſine quadam, in re iniquiſſima, æquitatis ſpecie excellentiori virtuti ſæuius bellum indicit, minorem minus acriter inſectatur. Nihilominus illius nomen, in cuius ma-

xime caput maledictorum tela intentabat, penitus ſubticet, me ſolum nomine, cognomine, patria, ne quæ deſint ad cognitionem ſymbola, graphicè deſignat. Cur tandem? Ego quidem illud metu, hoc contemptu accidiſſe ſuſpicor. Verebatur forte ne ſi potentioris nomen contemptius vſurparet humeris linguæ proteruiam, ac oris impuritatem lueret, & à bono quopiam Omometra malus Geometra male mulctaretur; de me autem meoq; ingenio forſan acceperat, nec nocere poſſe ſi vellem, nec velle ſi poßem. Hic ergo omiſſis diſſidij cauſis, quibus ſuam cauſam infirmari, ac exiſtimationem labefactari non neſciebat, Pythagorico ſupercilio, ac ſola verborum quæ αὐτὸς ἔφα, authoritate, mihi aut inſcitiæ aut malignitatis notam inurere conatus eſt. Primum non diffiteor neq; dedecori duco; vitium id eſt, cuius (ſi quod ineſt) probrum aut plurimum minuit communio, aut penitus tollit naturæ conditio. Quotusquiſq; enim eſt eorum qui recte ſapiunt qui neſciat, immo qui hoc ipſum ſciat ſe, ac mortalium plæroſque omnes nihil ſcire: aut ſi quid ſciat, quod Matheſi forte acceptum ferre poteſt, id vero adeo exiguam eſſe partem eorum quæ neſciat, vt iam penitus ignarus ſit ni vltro concedat ſe eſſe ignarum, Alterum vero conſtanter nego, eiusq; cauſa aduerſario iniuriarum dicam ſcribo: doli mali crimen eſt quod affingitur turpe, nefarium: deteſtabile; cuius me cum in omni vita immunem fuiſſe norunt quot quot me norunt; tum vero eo tempore quo me eius inſimulat, dum ſimultates mecum exercet Eudoxus, ne ſuſpicione quidem ac coniectura coarguendum fuiſſe fateberis, bone Lector, ſi mecum otioſe ac patienter diſſidij cauſam atq; originem inſpexeris, & rem totam à carceribus quod aiunt, ad calcem reuocaris. Atque id quidem ad propoſitiones nonam, decimam, aut vndecimam huius, in quibus belli ſeminarium deliteſcit, aperiendum erat, illic claſſicum canendum, & calamus ad iuſtam defenſionem armandus erat; ſed vt verum fatear, non ſolum pigebat lectorem ab vtili lectione ad inutile ſpectaculum, ac tanquam ab Academia ad Arenam auocare, ſed pudebat virum ſtudioſum Mirmillonem agere, ac puluerem literarium iurgioſo atramento fœdare. At vrgeor, vis infertur, quid agam? num digitum tollam, arma ſubmittam, ac Salmacide ignauior ſpolia concedam ſine ſudore & ſanguine? Conſultius hoc forte quidem eſſet in hoc certaminis genere in quo, vt ſapienter Demoſthenes, vincit qui vincitur, ac inferior eſt, qui ſuperior euaſerit; idq; omnino agerem, ni eam mihi vitæ conditionem ac veluti ſtationem fortuna aſſignaßet quam tueri ſine hominum exiſtimatione (quæ bonis viris

ſine

ſine vita, quamſine ea vita; potior eße debet) nulla ratione poßum. Ea vero impetitur, atq; acriter impugnatur, igitur vindicanda eſt, ac omni ſi opus fuerit πανοπλίᾳ defendenda. Humanum eſt in eos qui humanitatis obliuiſcuntur eſſe inhumanum, ne veterem iniuriam ferendo inuites nouam, ac, quod eſt in prouerbio, ſi in ouem degeneres, luporum, aut Lycanthroporum potius in te feritatem prouoces. Neque tamen muliebri impotentia in conuitia prorumpam, aut ex Suburrę fornicibus potius quam ex Stoæ porticibus arma depromam,

Εἶκε ςυγὸς θύγαθερ, πολέμυ καὶ δηιοτῆτος
Οὐχ ἅλις ὅττι γυναίκας ἀνάλκιδας. ἠπεροπεύης;

Sed prætextata veritate ſtipatus id agam tantum vt ſuam calumniæ perſonam detraham, totaq; re tanquam in Areopago candide expoſita, iudicio tuo neque verborum lenocinijs corrupto, neq; amplificationum machinis expugnato citra vllam prouocationem ſtabo. Confido autem adeo liquido auſpicio cauſam hanc à me ſuſceptam, vt vel improbitas ipſa illi vltro candido atq; integro calculo ſit ſuffragatura. Docuit annis ſuperioribus in Patauina Academia Matheſin vir triplici ſcriptorum, maiorum, morumq; gloria ter Glorioſus. prima vt non infimum ei inter Mathematicos, ita ſua æſtimatione longe inferius Nomen comparauit. A ſecunda Cognomen accepit ſplendidum, ſplendorem nullum. Tertia Agnomen indidit quod Plautinus Pyrgopolynices, Terentianus Thraſo, recentior Scarabombardonides inuidere poſſet: adeo magnifice de ſe ſentire, ac Tragice loqui dicitur. Audio enim iucundiſſima fraude quondam ſibi ipſi impoſuiſſe qui Mathematici nomen mereretur præter ſe reperiri neminem, ac vnum ſe inter mortales qui docendæ Matheſeos prouinciam pro dignitate obire valeret: adeo autem alte menti paralogiſmum illum inſedíße vt ne tribus quidem Anticyris elui poſſit. Vix credam ita eum credidiße; neque ſi credidit, conſultum vel curatoribus ſuis duxero eum blandiſſimo hoc morbo liberare, ne quod ille quondam φρενοβλαβὴς à ſeruatoribus ſuis perditum ſeſe exclamet, ac redditæ ſanitatis beneficium in maleficij loco ducat. Hoc tamen aſſeram tunc, ni me opinio fallit, fuiße in viuis Marinum Ghetaldum, Alexandrum Anderſonum, Ioannem Neperum, & adhuc ſuperſtites eße Chriſtophorum Gruenbergium, Claudium Bachetum, Henricum Briggium, Io. Keplerum, Vvillebrordum Snellium, quos qui Mathematicos nega-

rit, næ ille in alio mundo natus, ac Mathematicum ne pictum quidem aut fictum vnquam vidiſſe videatur. Addo nullum viri iſtius tunc opus extitiſſe quod palmarium cenſeri, ac dignum cognomini nomen tribuere poſſet. Qui enim extabat de Cometis tractatus ex varijs variorum authorum ſententijs apte concinnatus authori quidem ſuo ornamento erat, hunc tamen centonem qui trabeam dixiſſet, ac inde Mathematicorũ Imperatorem conieciſſet, annon ille Glaucum æſtimandi imperitia ſuperaſſet? Quanto illi interuallo, mea quidem ſententia, hac in re præferendus Scipio Claramontius, inſignis & Philoſophus & Mathematicus, qui decumana Tychonis Brahe machinamenta ne gry quidem reformidans, ac contra immanem quæ in omnium animis de nouo illo Athlante inualuerat opinionem ingenij vigore, ac demonſtrationum ope eluctatus, Cometas nouaque aſtra quæ ille parum legitima ἀποθεώσει in cæleſtia corpora retulerat, ac ſtellarum ciuitate donarat, in ordinem redegit, aut ita redegiſſe viſus eſt, vt de re, quam præcox hominum credulitas indubitatam fecerat, non ſine ratione dubitare poſſis: de qua etiam aliquando, Deo fauente, meum iudicium qualecumq; illud ſit interponam. Sed hæc forte ferenda fuiſſent ni Salmonei temeritate etiam maiorum gentium Deos æmulari, atq; ex inglorio adhuc Mathematico in glorioſum Peripateticum, immo & Peripateticorum ſuperciliosum Ariſtarchum euadere tentaſſet. Sed

Dum fulmen Iouis, ac ſonitus imitatur Olympi

iuſto in FORTVNIO, LICET, O *Lector, admodum benigno vltricem audaciæ ſuæ* NEMESIN *expertus eſt. Nam vir doctrina inſignis in Controuerſijs de cometarum quiete, loco Boreali, ac parallaxi Ariſtotelea*

————————denſa inter nubila telum
Torſit (non velut ille faces, ac fumea tædis
Lumina) præcipitemq; immani fulmine adegit.

Prodierunt poſtea in lucem exercitationes Mathematicæ, quæ tum primum ampullas immanes non omnino inanes, ſuumq; authorem non iam Ματαῖον *ſed* Μαθηματικὸν *prodiderunt. Licet enim ſcopis diſſolutis,*

que

ac emiſſarijs variorum temporum palmitibus ſimilia nonnullis viſa ſint quæ ibi promit, neq; ordine connexa, neq; in vnum vnius operis finem conſpirantia: ego tamen in tanta collectaneorum frequentia, furtorum licentia, canonum inani copia quibus pleraq; recentiorum Mathematicorum ſcripta laborant non potui non probare quę iſte protulit, & rerum momento vtilia, & varietate iucunda, ſed proprietate præſertim inuentionis rara, ſit enim veritati, quam profiteor, ſuus locus, noua ſunt pleraque licet non omnia, boni ingenij non improbi tantum laboris partus, ſui peculij quæſtus non alieni raptus. Atq; vtinam illum hac in re imitarentur quos inſanus tabularum calculus vexat, quique conſuendis in monſtroſas veſtes priorum authorum ſcrutis inuigilant, ac denique toti in eo ſunt vt Pandectarum ſartura Scombris tunicas parent, melius ecquidem rei Mathematicæ conſultum eſſet, neque illa indigeſtorum operum, ac ſuperuacaneorum voluminum mole laborans tardius ad ſuum incrementum properaret. Sed de hominis gloria ſatis; nunc propius ad rem noſtram. Cum vir iſte in Patauino Gymnaſio prima ſtipendia meruiſſet, de ſecundis cum Illuſtriſſimis Academiæ moderatoribus conuenire non potuit, vt qui ſuæ operæ pretium ſua de ſeipſo opinione metiretur. Agunt quidem humaniſſimi Domini omnia, vt virum quem in pretio habebant retineant, rationes omnes adhibent quibus peruicacem animum ſubigant, conditiones proponunt æquiſſimas, ſed reſpuit ille, omnes præter ſuam, cui ὥσπερ λεπὰς προσίσχεται, ratus fortaſſis neceſſitate coactos in eam tandem venturos. Sed læſa obſtinatione patientia in iuſtam indignationem vertitur, abdicatur inſcio prouincia, cogitatur de alio, accerſor ego Roma, aduolo, ſtupet ille tanquam fulmine ictus, & qui ſe vnicam illam auem arbitrabatur miratur quibus ex latebris alia prodierit, ſtatuit tandem vt erat tam aliorum contemptor, quam ſui admirator, Phænicopterum eſſe, qui verum Phenicem colore tantum ementiatur, aut de genere accipitrum degenerem Cucullum, qui cum proprio careat, alieno in nido parere velit. Hinc metus, ne quem videri volebat faſtidire, re autem ipſa maxime appetebat, bolum alius ex faucibus eriperet. Quare in Seplaſio (hæc illi curia erat) ſuorum Senatum cogit, narrat adueniſſe fucum qui in aluear non ſuum inuolare velit: rogat quid agendum vt ignauum pecus à præſepibus arceatur; variant ſententiæ, in hanc tandem pedibus itur, quæ etiam conſulto ſancitur; vt mihi quæſtio proponatur ex adytis Matheſeos deprompta noua, ἀναπόδεικτική, quam quia ſoluturus non eſſem, id enim tanquam ex tripode pronunciabant, ac

futurum

ſuturum omnino vel ſponſionibus certare parati erant, (adeo certo præiudicio hominem cuius doctrinam ignorabant ignorantiæ damnabant) tum demum Cenſoria virga notatus publicè capite diminuerer, ac in ærarios Matheſeos Profeſſores ablegarer; hinc eſſent qui omnibus neruis contenderent, vt atris Rogatorum calculis cum dedecore in vltimas terras abigerer. Sic in Panegyri illa omnium ordinum conſenſu ſtatutum de homine ignoto, inſonte, indicta cauſa, qui, ita me Deus adiuuet, eo aduenerant non vt in alienam poſſeſſionem inuaderem, ſed vt vacuam occuparem, aut potius oblatam à veris Dominis acciperem; cui non magis notum erat Eudoxi nomen quam ἀδοξοτάτου *cuiuſpiam, quod iampridem elapſa ſæcula obliteraſſent, aut olim ventura nondum prodidiſſent. Sed heus vos, o Patres in meam proſcriptionem Conſcripti; Hiccine verus gnomon ac libella qua Mathematicum probetis, aut germanus index quo adulterinum à genuino diſcernatis? An ignoratis per quos anfractus, ac ſinuoſas innumerabilium propoſitionum ambages ad concluſiones in Geometriæ veluti labyrintho deueniatur, quibus relegendis, ſæpe ne centum quidem Ariadnes glomi ſufficiant? neſcitis demonſtrationum Mathematicarum inuentionem ſæpe improbo multorum annorum labori, aliquando Fortunæ, nonumquam peculiari Genio atq; ingenio tribuendam, in qua qui Dijs illis non litarit, fruſtra oleum & operam inſumat? Quid ſi eodem æuo Euclides atque Archimedes vixiſſent, atque hic problema propoſuiſſet quo parabolæ æquale quadratum inueniendum eſſet, num ille Mathematicus non fuiſſet ſi hoc abſoluere non potuiſſet? Certe ſi Matheſin ignoratis, ignoſco; at ſi in ea verſati eſtis vereor ne malitiæ crimen (quod mihi poſtea hic iniuria affinxit) ego vobis iure tribuere poſſim. Hæc ego tunc; ſed iuſtæ rationes in inanes excuſationes trahebantur, riſuq;, cachinnis, ac tantum non ſibilis excipiebantur. Cum igitur animaduerterem non doctrinæ periculum fieri, ſed famæ periculum creari, porrectoq; veluti calyce obnunciari mihi illud in adagio* ἢ πῖθι ἢ ἄπιθι, *animum tandem alijs cogitationibus diſtractum in hanc vnam colligo vt propoſitæ quæſtioni ſatisfaciam, quod num aſſecutus fuerim decerne, mi lector, vt enim id præſtare poſſis demonſtrationum veritas quæ nullis opinionum nubibus inumbrata intaminatam ex clariſſimis fontibus fundit lucem; vt velis, æquitatis ſtudium, veritatis amor, omniq; gratia intemeratus animi candor efficiet. Erat autem huiuſmodi Eudoxi manu ſcripta, vbi literas tantum mutauimus, vt eam ad noſtrum ſchema aptaremus.*

Si à

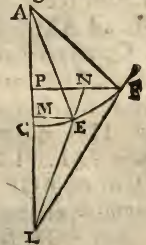
Si à puncto L. protractę diametri ducantur in cauam circuli peripheriam rectæ LK. LO. quæritur num arcus OK. KD. eandem, vel maiorem, vel minorem habeant proportionem quam angulus OLK. ad angulum KLD. tota expoſita apodixi.



Cui ego tribus potiſſimum propoſitionibus reſpondi, quæ ſunt huiuſmodi.

I.

SI à puncto protractæ diametri L. ducantur in conuexam peripheriam rectæ LF. LE. & ex centro circuli rectæ AF. AE. Dico maiorem eſſe rationem arcus FC. ad arcum EC. quam anguli FLC. ad angulum BLC. Ducantur ſinus recti FP. EM. & LE. producta ſecet PF. in N. Conſtat rectam PN. eſſe maiorem quam ME. Iam ſi non eſt maior ratio FC. ad EC, id eſt anguli FAC. ad EAC. quam anguli FLC. ad ELC. erit vel minor vel æqualis. Sit primum minor, ideoq; maior ratio FLA. ad ELA. quam FAC. ad EAC.



Quoniam FP. eſt tangens anguli FLP. & NP. tangens anguli NLP. maior erit ratio FP. ad PN. quam FLP. ad NLP. ſed FLP. ad NLP. ponitur maior quam FAC. ad 26.1.huius.
EAC. & ratio FAC. ad EAC. maior eſt quam ſinus recti corol.1.28. 1.huius.
FP. ad

FP. ad ſinum rectum EM. Igitur à primo ad vltimum ma-
13.5. 10.5. ior erit ratio FP. ad PN. quam FP. ad ME. minor igitur
eſt PN. quam ME. Quod eſt abſurdum.

Sed ponatur eadem ratio FAC. ad EAC. quæ FLC. ad
26.1.huius. ELC. quoniam maior eſt ratio FP. ad PN. quam anguli
FLP. ad angulum NLP. ponitur autem vt angulus FLP.
ad angulum NLP. ita angulus FAC. ad angulum EAC.
13.6. ſeu arcus FC. ad arcum EC. ſed arcus FC. ad arcum EC.
coroll,1.28. 1.huius. maiorem habet rationem quam ſinus FP. ad ſinum EM.
13.5. Igitur maior eſt ratio FP. ad PN. quam FP. ad ME. ideo-
10.5. que minor eſt PN. quam ME. Quod eſt abſurdum. Igitur
cum neq; minor neq; æqualis ſit proportio FAC. ad EAC.
proportioni FLC. ad ELC. neceſſe eſt vt ſit maior. Quod
erat propoſitum.

I I.

SI à puncto L. productæ diametri ducantur in cauam circuli rectæ LK. LO. ſecantes conuexam in E. F. & ex centro rectæ AK. AO. Dico maiorem eſſe rationem AOL. ad AKL. quam OLA. ad KLA. Ductis enim AF. AE. Quoniam permutando maior eſt ratio anguli FAL. ad angulum FLA. quam EAL. ad ELA. ex præcedenti, erit componendo maior ratio angulorum FAL. FLA. ad angulum FLA. quam angulorum EAL. ELA. ad ELA. ſed angulis FAL. FLA. ſimul eſt æqualis angulus externus
32.1. AFO. id eſt AOF. & angulis EAL. ELA. ſimul æqualis
5.1. eſt angulus externus AEK. id eſt AKE. Igitur maior eſt ra-
tio anguli AOF. ſeu AOL. ad angulum ALO. quam anguli AKE. id eſt AKL. ad angulum ALK. & permutando maior ratio anguli AOL. ad AKL. quam anguli OLA. ad KLA. Quod erat probandum.

Si à

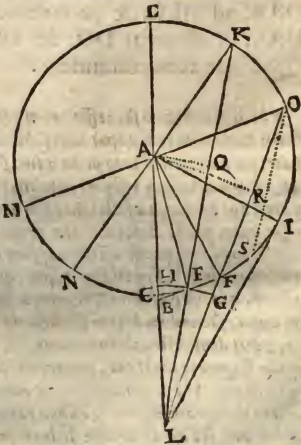
III.

SI à puncto L. productæ diametri ducantur in cauam circuli peripheriam rectæ LK. LO. ſintq; eadem quæ prius. Dico angulum OAD. ad angulum KAD. id eſt arcum OD. ad arcum KD. maiorem habere rationem, quam OLA. ad KLA. Nam cum maior ſit ratio AOL. ad ALO. quam AKL. ad ALK. erit componendo maior ratio vtriuſque AOL. ALO. ſimul, id eſt ipſius DAO. externi illis æqualis ad ALO. quam AKL. ALK. ſimul id eſt ipſius DAK. ad ALK. & permutando maior ratio DAO. ad DAK. id eſt arcus DO. ad DK. quam ALO. ad ALK. Quod erat demonſtrandum. 32.1.

Vbi demonſtratio ſucceſſit, eam ego non Eudoxo, me enim ille tanquam Diris deuotum caput auerſabatur, ſed Hippico (id nominis erat Patri patrato qui oblato prius aduerſarij libello, mihi bellum indixerat) eius amico non vulgari in manus dedi, cui pallor in genas momento emicans turbati ex felici ſucceſſu animi indicium non leue dedit. Hinc rogat quem probè demonſtratæ propoſitionis iudicem eſſe velim; Non alium, inquam, quam actorem ipſum mihi infenſum. Quid ſi ille te condemnarit? Appellabo typos qui mihi tot Rhadamantos ſuſcitabunt, quot Academiæ Platonicæ ingreßu Geometria dignos reddit, qui omnes ſecundum legem Cornelium de falſis, hominem condemnantes, veris demonſtrationum numellis, ac manicis conſtrictum, ac ignominiæ ſtigmate inuſtum, in publico literatorum foro catamidiandum exhibebunt. Sed prouocatione, vt audiui, opus non fuit, ille demonſtrationem genuinam agnouit, in qua tamen hoc deeſſe dicebat, quod non oſtenderet, ſed ad abſurdum deduceret, quæ res apud nonnullos Matheſeos imperitos non demonſtratæ propoſitionis inſtar erat, efficiebatq; vt non minus ignarus haberer, quam ſi nihil demonſtraſſem. Hic ego, vt verum fatear, labrum momordi, ac totus in vindictam exarſi. Quid, inquam, numquamne Philotherſites iſte me vltro vexare, atq; aliam ex alia moleſtiam nectere deſinet? aut forte hic mihi cum Ioſepho Scaligero negotium eſt viro mortalium omnium ἀγεωμετρητοτάτῳ cui εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγὴ ſcopulus, eiusq; vſus violenta in Geometria Tyrannis

eſſe videatur? minime vero, prætextam exuit hoſtis, veteranus eſt ac inter Triarios non vltimus, quem liuor in pugnam accendit, non inſcitia: obuiam igitur eundum, ac toto corpore, omnibusq; vngulis reſiſtendum, pugnandum, vincendum, ſed quo pacto? Primum ſi opinioni, qua plæraque mortalium reguntur, ſatis fecero; hinc ſi iiſdem armis, quibus me hoſtis, ego hoſtem inceſſero, ac Herculea vltione, quod dedit malum illud ipſum reddidero. Igitur exertis ingenioli quantuliscumq; viribus, aliam ἀπόδειξιν δεικτικὴν inuenio quæ erat huiuſmodi.

Si à puncto protractæ diametri L. ducantur in conuexam peripheriam rectæ LF. LE. & ex centro circuli rectæ AF. AE. Dico maiorem eſſe rationem arcus FC. ad arcum EC. quam anguli FLC. ad angulum BLC. Ducatur recta LI. tangens circulum in puncto I. Item per puncta F. E. recta FB. ſecans AL. in B. (ſecabit autem cum angulus LAF. recto minor ſit, nam cum rectus ſit



32.1. LIA. erit LAI. ac multo magis eius pars LAF. acutus, & in triangulo Iſoſcele AFE. angulus ad baſim AFE. acutus, quare angulis AFB. FAB. e-

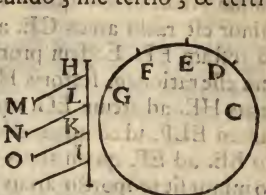
13.pron. xiſtentibus minoribus duobus rectis concurrent AB. FB.
8.5. ad partes B.) maior erit ratio ſectoris AFE. ad triangulum AEB. quam trianguli AFE. ad idem triangulum AEB. ſed ſector AFE. ad ſectorem AEC. adhuc maiorem habet rationem quam ad triangulum AEB. Igitur ſector AFE.
33.6. ad ſectorem AEC. id eſt arcus FE. ad arcum EC. maio-

rem

rem habet rationem, quam triangulum AFE. ad triangulum AEB. id eſt quam FE. ad EB. & conuertendo 1. 6.
minor eſt ratio arcus CE. ad arcum EF. quam rectę BE. ad rectam EF. Eodem prorſus modo oſtendemus maiorem eſſe rationem ſectoris HLE. ad ſectorem ELG. id eſt 33.6.
arcus HE. ad arcum EG. quam trianguli BLE. ad triangulum ELF. id eſt quam BE. ad EF. quare minor erit ratio BE. ad EF. quam arcus HE. ad arcum EG. Cum ergo minor ſit proportio arcus CE. ad arcum EF. quam rectæ BE. ad rectam EF. & BE. ad EF. minor quam arcus HE. ad arcum EG. erit etiam minor ratio arcus CE. ad arcum EF. quam arcus HE. ad arcum EG. id eſt anguli LAE. ad angulum ELF. & permutando, ac componendo, maior ratio arcus FC. ad arcum EC. quam anguli FLC. ad angulum ELC. Quod erat demonſtrandum. Hinc eodem modo quo ſecunda huius Apologiæ oſtendebam maiorem eſſe rationem AOL. ad AKL. quam OLA. ad KLA. ac tandem ex tertia eiuſdem, maiorem eſſe rationem arcus OD. ad arcum KD. quam anguli OLA. ad angulum KLA. Quod ab aduerſario initio propoſitum fuerat. 1. 6.

Hanc demonſtrationem per alium internuncium Eudoxo porrigo. Quid dixerit ignoro. Interim ego totus in talionem vertor. Ignoſcite ſuperi, hæc ferme prima iniuria fuit quæ patientiam meam deflorauit, & in vindictæ conatum innocentiam meam impulit. Occurrebat quidem fortis animi eſſe contemnere contemptum, nec ſuum contumeliæ telum è manibus tutius extorqueri, quam vbi prudentia laceſſita obmuteſcit, ſed rationem vicit (nec tamen ſine ratione) recentis, vt videbatur, iniurię ſenſus, cuius aculeum pati vel prudentes ac boni viri difficilime poſſunt. Quare non vt doctrinam eius probarem, ſed vt probationis quam in me adhibuerat iniquitatem indicarem, quod ipſe miniſtrarat telum in eum ipſum acuere cœpi, ac quo ſphæram, quod aiunt, redderem, ſequētem, quæſtionem quam potui difficilimam cudi, quam ſi quid in Mathematicis aduerſarius valeret, demonſtrari ab eo petij; adiecta etiam luculenta conditione, vt ſi demonſtraret, ei loco controuerſo, ſi ad eum aſpiraret, ſine controuerſia cederem.

In circulo CDE. ſumantur quatuor arcus CD. DE. EF. FG. ſitque primus minor ſecundo, hic tertio, & tertius quarto, aut contra; & linea quæcumq; recta HI. ita diuidatur vt rectę IK. KL. LH. eandem rationem habeant quam differentia ſinus verſi arcus GF. ad differentiam ſinus verſi arcus FE. & huius differentia ad differentiam ſinus verſi arcus DE. & ſic deinceps, & ductis parallelis IP. KO. LN. HM. poſſit recta IP. quadratum chordæ arcus GF. & duplum quadrati, aut quadratum ſinus verſi eiuſdem arcus, atq; ita ordine de reliquis. Quæritur num per quatuor puncta P. O. N. M. duci poſſit linea vnica regularis, & cuiuſmodi illa ſit.



Hanc vbi accepit primo ceſſim ire, hinc tergiuerſari, ac tandem reſpondere renuit, cauſatus proximum diſceſſum: nec immerito vt enim erat Matheſeos peritus ęnigma Bęotico difficilius animaduertit, ad quod ſoluendum neſcio quid Oedipo maius requirebatur. Prudenter igitur ire per extentum funem renuit, ne ſuo lapſu imperitis (nec enim apud iuſtos rerum æſtimatores minoris habendus fuiſſet) riſum moueret. Vt vero recens efferueſcebat in æmulum ira (cuius vt verum fatear, virulentiam tempus decoxit) pauca quędam Theoremata Geometrica, quę cum vnico problemate Diophanti ediderat, ſed minime vulgaria in manus meas tandem peruenerunt, quæ cœpi diligentius perſcrutari, vt nodum ſi fieri poſſet, vel in ſcirpo ipſo inuenire poſſem. Atq; vt Lynceos habet oculos vlciſcendi libido, tria occurrerunt quę vibrarem tela, quę ſi non lethale vulnus inferrent, ſaltem cutem non ſine doloris ſenſu perſtringerent. Primum audieram non abſq; Theſeo ſuum illum Achillem, ita enim haberi volebat, laudem ſibi comparaſſe. Secundo animaduerti in Theoremate determinato pagina nona linea 15. conſequentiam non recte inferri ex ęquo, vt ipſe habet, nempe ex 31. propoſit. 5. Sed ex Scholio proportionis

tionis 15. eiuſdem quinti, vt intuenti manifeſtam erit. Deniq; occurrit in eadem propoſitione eum non omnes caſus perſecutum fuiße; ſed tantum cum linea CD. circulum ſecat, non cum tangit. Ex illis igitur tribus capitibus hanc propoſitionem efformaui quam ei transmiſſi demonſtrandam; vt ſuo quodammodo ſe gladio iugulare cogeretur. Propoſitum ſit demonſtrare Theorema determinatum à C. Mallio Eudoxo non fuiſſe recte demonſtratum: quæ res eum in miram ſolicitudinem coniecit, cum latentem cuniculum deprehendere non poſſet. Atq; hęc eſt malignitas cuius me inſimulauit Eudoxus, qui ſi tam recte animorum παθολογίαν, quam verborum κακολογίαν tenuiſſet, hanc potius ęquiſſimum talionem indigetaſſet, neq; iniuriam à me illatam conqueſtus, ſed iuſtiſſime propulſatam confeſſus fuiſſet. Caueat autem ne ſi pergat acriorem iratę

In ſeſe cieat Rhamnuſidis iram.

Dum quod eius afflatu factum eſt Dirarum teterrimę ſtylo iniquiſſimo audet aſcribere. Sed quid ſentiendum, tu dixeris integerrime Lector, quam enim tibi ab initio hac de re, de qua potiſſimum lis conteſtata eſt, cognoſcendi, ac pronunciandi poteſtatem, quod in me fuit, conceſſi, eandem nunc ratam habeo, iudicio tuo ne tantillum quidem refragaturus. At quęres quid re vera de illis Theorematis ſentiam? Aio eſſe elegantiſſima, & quę vel ſola ſuum authorem, quiſquis ille ſit, Geometrarum albo dignum reddere poſſint: quę vero negligentius aut omiſſa, aut immutata ſunt parum aut nihil de eius laude detrahunt, cum facilime vel à mediocriter in rebus Mathematicis verſato reſtitui poſſint.

Ridebis, generoſe Lector, homuuciones tanta contentione pro anguſto Academiæ angulo tumultuantes. Recte id quidem, ſi Alexandrum ac Darium de Aſię Imperio Cęſaremq; ac Pompeium de orbis dominatu contendentes riſeris. Speciosior illis, non maior diſſidij cauſa fuit. Nam rerum humanarum magnitudinem non moles ſed ęſtimatio facit. Tanti mihi Patauinus ſuggeſtus quanti Pelleo iuueni, ac perpetuo Dictatori non vnus ſed Democriticorum mundorum aceruus. Pro eo ſi pugnant, pugnamus & nos ſolo armorum genere, non pugnandi ardore differentes. Illi velitibus, nos proluſionibus prelium accendimus; illi eminus tela, non ſcommata iacimus; cominus illi haſtis, ac gladijs, nos ſtylis ac calamis congredimur,

gredimur, legiones illi, nos rationes committimus. Vtriſque finis victoria, quęque victoriam ſequitur gloria, ſed noſtra eo ſæpe maior quod in vnum caput collecta magis eluceſcat, illa ampliſſima communione in multa hominum millia diſſipata dubio plerumque ſplendore effulgeat. Nempe ſic voluit qui voluntatis nutu omnia condidit, vt non naturalia tantum, ſed etiam humana lite & amicitia conſtarent, illa quidem vt benefica vnione ſeruarentur, iſta ne noxio torpore corrumperentur; vt enim marcet ſine aduerſario virtus, ita æmulatione laceſſita mirum quanta contentione ad egregia facinora feratur.

Tunc bene fortis equus reſerato carcere currit,
Cum quos prætereat, quosve ſequatur habet.

Teſtem hanc ipſam exhibeo Academiam, ac infinita pręſtantiſſimorum virorum, qui ex ea tanquam exequo prodierunt, opera, quę forte ęterno preſſa gelu, in authorum, tanquam terræ viſceribus delituiſſent, ni ea genialis æmulationis ęſtus in fœcundum germen, ac vberrimos fructus excluſiſſet. Certe hoc quicquid ſit operis tot linearum, triangulorum, circulorum ſchematiſmis refertum, non ſine ſumptibus qui cenſum meum longe ſuperant, neſcio an ego, neſcio an antagoniſta ſuum editurus fuiſſet, ni ſtimulos æmula virtus addidiſſet. Huic tu has etiam vindicias, non inuidię, non maleuolentiæ aſcribe benigne Lector, & Vale.

FINIS.

CVRVI

CVRVI AC RECTI Proportio promota.

LIBER TERTIVS.

THEOREMA I. PROPOS. I.

SI fuerit vt prima recta ad ſecundam, ita tertia ad quartam; & aſſumantur quinta & ſexta: erit vt rectangulum ſub prima & quinta, ad rectangulum ſub ſecunda & ſexta, ita rectangulum ſub tertia & quinta, ad rectangulum ſub quarta & ſexta.



Sit vt A. recta ad rectam B. ita recta C. ad rectam D. & aſſumantur duæ quęlibet E. F. Dico rectangulum ſub E. A. ad rectangulum ſub F. B. eſſe vt rectangulum ſub E. C. ad rectangulum ſub F. D. Cum enim ſit vt E. ad F. ita E. ad F. & vt A. ad B. ita C. ad D. erit ratio compoſita ex E. ad F. & A. ad B. eadem ratio-

ni compoſitæ ex E. ad F. & C. ad D. ſed ratio compoſita ex ratione E. ad F. & A. ad B. eſt ratio rectanguli ſub E. A. ad rectangulum ſub F. B. & ratio compoſita ex ratione E. ad F. & C. ad D. eadem eſt quæ rectanguli ſub E. C. ad rectangulum ſub F. D. Igitur vt rectangulum ſub E. A. ad rectangulum ſub F. B. ita rectangulum ſub E. C. ad rectangulum ſub E. D.

23.6.

Aliter. Cum rectangula ſub EA. & ſub EC. habeant eandem altitudinem E. erunt vt A. ad C. Ruſſus cum rectangula ſub F. B. & F. D. habeant eandem altitudinem F. erunt vt B. ad D. Quare cum ſit vt A. ad C. ita rectangulum ſub E. A. ad rectangulum ſub E. C. vt autem A. ad C. ita permutando B. ad D. & vt B. ad D. ita rectangulum ſub F. B. ad rectangulum ſub F. D. erit vt rectangulum ſub E. A. ad rectangulum ſub E. C. ita rectangulum ſub F. B. ad rectangulum ſub F. D. Quod erat probandum.

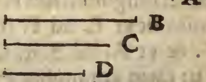
1. 6. Schol. 11. 5.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

SI fuerint quatuor rectæ proportionales: erit vt quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, ita rectangulum ſub prima & tertia, ad rectangulum ſub ſecunda & quarta.

Sint quatuor rectæ A. B. C. D. proportionales. Dico eſſe vt quadratum A. ad quadratum B. ita rectangulum ſub A. C. ad rectangulum ſub B. D. Nam cum ſit vt A. ad B. ita C. ad D. erit permutando vt A. ad C. ita B. ad D. ideoq; rectangula ſub A. C. rectangulis ſub B. D. ſimilia ſunt: ſimilia autem ſunt & quadrata A. B. Igitur ſuper duabus primis A. B. conſtituta ſunt

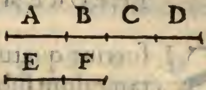
1. defin. 6.



duo

duo rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta, videlicet quadrata A. B. & ſuper duabus C. & D. itidem duo rectangula C. A. & D. B. ſimilia: vt igitur quadratum A. ad quadratum B. ita rectangulum ſub A. C. ad rectangulum ſub B. D. 22.6.

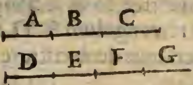
Aliter. Cum ſit vt A. ad B. ita C. ad D. aſſumantur E. quinta, & F. ſexta; quarum E. ſit æqualis primæ A. & F. ſecundæ B. erit ex præcedenti propoſitione, vt rectangulum E. A. id eſt quadratum A. ad rectangulum F. B. id eſt quadratum B. ita rectangulum ſub E. C. id eſt, ſub A. C. ad rectangulum ſub F. D. id eſt ſub B. D. Quod erat demonſtrandum. 1.3.huius.



THEOREMA III. PROPOSITIO III.

SI fuerint tres quantitates quæcumq; priores, & quatuor rectæ lineæ poſteriores, fueritque vt prima priorum ad ſecundam ita prima poſteriorum ad ſecundam; & vt ſecunda priorum ad tertiam, ita tertia poſteriorum ad quartam: erit vt prima priorum ad tertiam, ita rectangulum ſub prima & tertia poſteriorum, ad rectangulum ſub earumdem ſecunda & quarta.

SIT in prioribus quantitatibus quibuſcumque vt A. ad B. ita in poſterioribus rectis lineis D. ad E. & vt B. ad C. in prioribus quantitatibus, ita F. ad G. in poſterioribus rectis. Dico eſſe vt A. ad C. ita rectangulum ſub D. F. ad rectangulum ſub E. G. Quoniam eſt vt A. ad B. ita D. ad E. & vt B. ad C. ita F. ad G. erit ratio compoſita ex rationibus A. ad B. & B. ad C. eadem quæ compoſitæ ex ra-

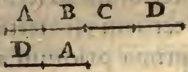


tionibus D. ad E. & F. ad G. ſed ratio compoſita ex rationibus A. ad B. & B. ad C. eſt ratio A. ad C. & ratio compoſita
23.6. ex rationibus D. ad E. & F. ad G. eſt eadem quæ rectanguli ſub D. F. ad rectangulum ſub E. G. Igitur vt A. ad C. ita rectangulum ſub D. F. ad rectangulum ſub E. G. Quod demonſtrare volebamus.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI fuerint quatuor rectæ proportionales: rectangulum ſub prima & quarta erit medium proportionale inter rectangula ſub prima & ſecunda, & ſub tertia & quarta.

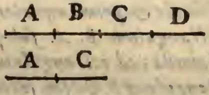
SINT Quatuor rectæ proportionales A. B. C. D. nempe vt A. ad B. ita C. ad D. Dico rectangulum ſub A. D. eſſe medio loco proportionale inter rectangulum ſub A. B. & rectangulum ſub C. D. Aſſumantur duæ infra quatuor datas quarum D. ſit æqualis quartæ D.
1.3. huius. & A. æqualis primæ A. erit, ex prima tertij huius, vt rectangulũ ſub D. A. id eſt, ſub quarta & prima ad rectangulum ſub A. B. prima & ſecunda, ita rectangulum ſub D. C. quarta & tertia ad rectangulum ſub A. D. prima & quarta. Quare cum ſit vt rectangulum A. D. ad rectangulum AB. ita rectangulum D. C. ad rectangulum A. D. erit conuertendo vt rectangulum A. B. ad rectangulum A. D. ita rectangulum A. D. ad rectangulum D. C. Quod propoſueramus demonſtrare.



THEOREMA V. PROPOS. V.

SI fuerint quatuor rectæ proportionales: erit vt quadratum primæ, ad rectangulum ſub ſecunda & tertia, ita rectangulum ſub prima & tertia, ad rectangulum ſub quarta & tertia.

SINT quatuor rectæ proportionales: vt A. ad B. ita C. ad D. Dico eſſe vt quadratum A. ad rectangulum B. C. ita rectangulum A.C. ad rectangulum C.D. Aſſumantur duæ infra quatuor datas quarum A. ſit æqualis primæ A. & C. æqualis tertiæ. C.

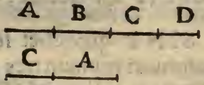


erit ex prima tertij huius rectangulum ſub AA. id eſt quadratum A. primæ ad rectangulum C. B. ſub ſecunda & tertia; ita rectangulum A. C. ſub prima & tertia, ad rectangulum C. D. ſub tertia & quarta. Quod eſt propoſitum. 1.3.huius

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

SI fuerint quatuor rectæ proporrionales: erit vt rectangulum ſub prima & tertia, ad rectangulum ſub prima & ſecunda, ita quadratum tertiæ ad rectangulum ſub prima & quarta.

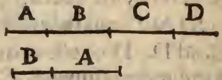
SIT vt A. prima ad B. ſecundam ita C. tertia, ad D. quartam. Dico eſſe vt rectangulum A. C. ad rectangulum A. B. ita quadratum. C. ad rectangulũ A. D. Aſſumantur C. A. æquales tertiæ & primæ. Erit ex 1. 3. huius rectangulum A. C. ſub prima & tertia, ad rectangulum A. B. ſub prima & ſecunda, vt rectangulum C. C. id eſt quadratum. C. tertiæ, ad rectangulum A. D. ſub prima & quara. 1.3.huius.



SCHOLIVM.

EX eodem principio poſſent demonſtrari propoſitiones 16. & 17. lib. 6. elementorum, nempe ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod ſub extremis comprahenditur rectangulum, æquale eſt e i quod ſub medijs comprahenditur rectangulo. Sit enim vt A. ad B. ita C. ad D. & aſſumantur B. A. ſecundæ & primæ æquales: Erit vt rectangulum B. A. ſub prima & ſecunda; ad rectangulum A. B. ſub ſecunda ex prima ita rectangulum B. C. ſub ſecunda & tertia, ad rectangulum A. D. ſub prima & quarta: æqnalia autem ſunt rectangula BA. & AB. Igitur etiam æqnalia ſunt rectangula B. C. & A. D.

1.5. huius.



Quod ſi intermediæ B. C. æquales ponantur, eodem modo oſtendemus rectangulum A. D. rectangulo B. C. id eſt quadrato B. vel C. eſſe æquale.

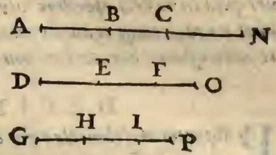
THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI ſint quotlibet magnitudinum ſeries quotlibet magnitudines continentes ſingulæ in qualibet proportione Arithmetica continua; erunt & compoſitæ primæ cum primis, ſecundæ cum ſecundis, & ſic deinceps, in continua proportione Arithmetica.

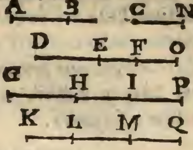
SINT quotlibet ſeries magnitudinum quarum prima contineat primum tres magnitudines AB. DE. GH. ſecunda magnitudines BC. EF. HI. tertia magnitudines CN. FO. IP. habeantque AB. DE. GH. rationem Arithmeticam, vt & aliæ ſeries. Dico quod etiam compoſitæ primæ AB. BC. CN. & ſecundæ DE. EI. IB. & tertiæ GH. HI. IP. habent

ratio-

rationem Arithmeticam. Quoniam tres magnitudines AB. DE. GH. ſunt in proportionalitate Arithmetica, erunt AB. GH. duplo ipſius DE. æquales (vt oſtendemus in ſequenti Scholio) item BC. HI. ſimul duplæ erunt ipſius EI. & CN. IP. ipſius FO. Igitur omnes ſimul AB. GH. BC. HI. CN. IP. id eſt tota AN. & tota GP. erunt ſimul duplæ omnium DE. EF. FO. id eſt toti DO. Igitur in ratione Arithmetica ſunt AN. DO. GP. vt ſequenti Scholio probabimus. 1. 5.



Sed contineat quælibet ſeries magnitudines plures tribus vt prima contineat magnitudines AB. DE. GH. KL. ſecunda magnitudines BC. EF. HI. LM. tertia magnitudines CN. FO. IP. MQ. Habeantque AB. DE. GH. KL. rationem Arithmeticam continuam, vt & aliæ ſeries, ſingulæ eandem, aut peculiarem. Probabimus ex prima parte huius propoſitionis, tres AN. DO. GP. eſſe in proportionalitate Arithmetica. Rurſus ex eadem oſtendemus, tres magnitudines DO. GP. KQ. eſſe in ratione Arithmetica. Igitur ex definitione, ipſarum AN. DO. & DO. GP. eadem eſt differentia. Item ipſarum DO. GP. & GP. KQ. eadem eſt differentia: Quare æquales ſunt differentiæ magnitudinum AN. DO. GP. KQ. Sunt igitur in continua ratione Arithmetica. Quod erat demonſtrandum. 1. pronunc.



SCHOLIVM.

QVod vero duæ magnitudines AB. GH. ſint duplæ ipſius DE. & reliqua quæ in propoſitione ſupponuntur vera ſint,

ſint, demonſtrauit præ cæteris luculentiſſimè Claudius Gaſpar Bachetus, vir non in mathematicis ſolum, ſed in omni genere literaturæ vel antiquis conferendus in abſolutiſſimis commentarÿs quæ in Diophantum edidit, cuius aliquot propoſitiones quia in noſtris operibus vſuuenient, a numeris ad quamlibet quantitatem transferemus, vt ÿs conſulamus quibus forte nobiliſſimus hic author non innotuit.

DEFINITIO.

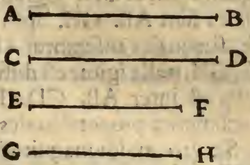
P*Roportio Arithmetica eſt cum in tribus aut quatuor ſeu numeris ſeu magnitudinibus eiuſdem generis, eadem (aut nulla) eſt differentia primæ, & ſecundæ, quæ ſecundæ & tertiæ; aut quæ tertiæ & quartæ: ita tamen vt ſi prima cum ſecunda comparetur ac ſecunda cum tertia, aut tertia cum quarta ſingulæ ſingulis vel æquales vel maiores vel minores exiſtant. Eadem vero proportio ſi in tribus terminis cõſiſtat μεσότης ſeu medietas ac anologia; ſi in quatuor analogia tantum ac proportionalitas Arithmetica dicitur. Quod vero id nominis non tantum quantitati diſcretæ, ſed etiam continuæ tribui poſſit, authorem habemus præter alios luculentum Pappum Alexandrinũ qui libro 3. collect. mathem. illud in quantitate continua paſſim vſurpauit.*

I.

SI fuerit eodem differentia primæ magnitudinis ad ſecundam quæ tertiæ ad quartam, ſeu; ſi fuerint quatuor magnitudines Arithmeticè proportionales; ſumma ex extremis conflata erit mediarum ſummæ æqualis: & ſi extrema ſimul ſumpta fuerint æqualia medijs ſimul ſumptis, erunt dictæ magnitudines Arithmetice proportionales.

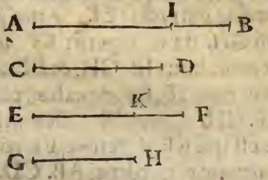
SINT

SINT quatuor magnitudines AB.CD.EF.GH. ſitque eadem differentia AB. & CD. quæ EF. & GH. (quod eſt eſſe Arithmeticè proportionales) Dico duas AB. GH. ſimul duabus CD. EF. eſſe æquales.



Sit primum AB. ipſi CD. æqualis, cum nulla ſit differentia inter AB.& CD.etiam nulla erit inter EF. GH. ex ſuperiori definitione, æquales igitur ſunt EF. GH. Si igitur æqualibus AB. CD.addantur æquales EF.GH. nempe GH. ipſi AB. & EF. ipſi CD. erunt AB.GH. ſimul æquales ipſis CD. EF. ſimul. Quod primo probandum erat.

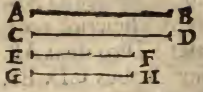
Sit ſecundo maior AB. quam CD.quorum differentia ſit IB. & duarum EF.GH.differentia ſit KF.manifeſtum eſt AI. CD. eſſe æquales cum ab ijs pars IB.qua differunt ſublata ſit: Item EK. GH.ob eandem rationem ſunt æquales: æquales autem etiam ſunt IB. KF. ex hypotheſi. Igitur ex prima parte huius erunt duæ AI. GH. duobus CD. EH. æquales, quibus ſi addantur æquales IB. KF. erit tota AB. cum GH. æqualis toti EF. cum CD. Quod ſecundo loco erat oſtendendum.



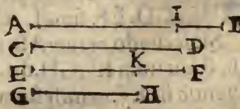
Tandem inuertatur ordo magnitudinum; ita vt prima ſit GH. ſecunda EF. tertia CD. vltima AD.eodem prorſus demonſtrandi modo oſtendemus duas GH. AB. duabus EF. CD. eſſe æquales.

Sed ſint duæ magnitudines AB. GH. ipſis CD. EF. æquales. Dico, differentiam AB. & CD. eſſe eandem differentiæ

ferentiæ EF. & GH. ſeu quatuor AB. CD. EF. GH. eſſe Arithmetice proportionales. Sint rurſus primo æquales AB. & CD. Quoniam æquales ſunt AB. GH. ipſis CD. EF. ſi æquales auferantur AB. & CD. remanebunt æquales EF. GH. nulla igitur eſt differentia inter EF. GH. ſed & nulla eſt inter AB. CD. Igitur ex ſuperiori definitione Arithmetice proportionales ſunt AB. CD. & EF. GH.



Sit vero maior magnitudo AB. magnitudine CD. exceſſu IB. & ſint æquales AB. GH. ſimul ipſis CD. EF. ſimul: erunt igitur AI. CD. ſublata differentia IB. æquales. Quare, ſi ex aggregatis AB. GH. & CD. EF. quæ ſupponuntur æqualia, auferantur æquales, illinc AI. hinc CD. remanebunt IB. GH. ipſi EF. æquales. Rurſus detracta EK. æquali ipſi GH. ita vt ſuperſit KF. ſi ex æqualibus IB. GH. & EF. auferantur æquales EK. GH. remanent IB. KF. æquales, eſt autem KF. differentia ipſarũ EF. GH. Igitur IB. differentia primæ, & ſecundæ, æqualis eſt ipſi KF. differentiæ tertiæ & quartæ, ſunt ergo, ex definitione præcedenti AB. CD. EF. GH. Arithmetice proportionales.



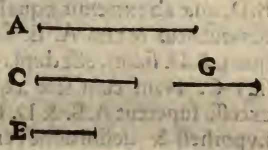
Sed ſit minor prima magnitudo GH. quam ſecunda EF. exceſſu KF. & ſint æquales GH. AB. ipſis EF. CD. erunt igitur GH. EK. æquales. Quare ſi ex aggregatis æqualibus GH. AB. & EF. CD. auferantur æquales illinc GH. hinc EK. remanebunt KF. & CD. ipſi AB. æquales. Iterum ſumpta AI. æquali ipſi CD. erit IB. differentia ipſarum CD. AB. Quare ſi ab æqualibus KF. CD. & AB. auferantur æquales, illinc CD. hinc AI. remanebunt; vt prius, differentiæ KF. IB. æquales, ideoque erunt prædictæ quatuor magnitudines Arithmetice proportionales. Quod erat vltimo loco demonſtrandum.

Si.

II.

SI fuerint tres magnitudines in medietate Arithmetica: erit prima cum tertia dupla ſecundæ. Et ſi prima cum tertia fuerit dupla ſecundæ, erunt tres magnitudines in medietate Arithmetica.

SINT tres magnitudines A. C. E. in medietate Arithmetica. Dico duas A. E. ipſius C. eſſe duplas. Accipiatur G. æqualis ipſi. C. Erit ipſarum A. C. & C. E. eadem differentia, ſed ipſarum CE. & G.E. etiam eadem eſt differentia; ergo ipſarum A. C. & ipſarum G. E. eſt eadem differentia. Igitur per præcedentem duæ A. E. ſimul duabus C. G. ſimul ſunt æquales: ſed C. G. ſimul ſunt duplæ ipſius C. cum inuicem ſint æquales C. & G. ergo A. E. ipſius C. ſunt duplæ. Quod efficere primo loco volebamus.



ex definit. ſuperiori.

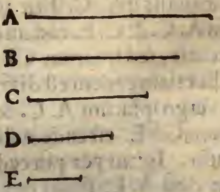
Sed ſint A. E. duplæ ipſius. C. Dico tres magnitudines A. C. E. eſſe in medietate Arithmetica. Sumpta enim rurſus G. æquali ipſi. C. Cum A. E. ſint duplæ ipſius. C. erunt duabus C. G. æquales. Igitur per præcedentem, erunt quatuor A. C. G. E. id eſt A. C. C. E. in proportione Arithmetica, ideoque A. C. E. in medietate Arithmetica. Quod ſecundo loco probandum fuerat.

Priorem patrem huius propoſitionis aliter demonſtrat Clauius Schol. in 17. 6. propoſitione 1.

I I I.

SI ſint quodlibet magnitudines in proportione Arithmetica continua, extremæ ſimul ſumptæ æquales ſunt duabus ab extremis æqualiter remotis, & duplo mediæ in multitudine magnitudinum impari.

Sint quotlibet magnitudines A.B. C. D. E. multitudine impares æqualiter differentes, ſeu in proportionalitate Arithmetica continua. Dico extremas A.E.eſſe æquales ipſis B.D. quæ ab extremis æqualiter remouentur & tam A. E. ſimul quam B.D. ſimul, eſſe duplas ipſius C. Nam cum ſeſe æquali exceſſu ſuperent A.B. & D. E.ex hypotheſi & definitione; erunt A. E. ipſis B.D.æquales,per primam huius Scholij: & quia B.C. D. ſunt Arithmeticè proportionales,etiam ex hypotheſi, erunt B. D. ipſius C. duplæ, per ſecundam huius Scholij. Sed duabus B. D. æquales ſunt duæ A. E. Duplæ igitur ſunt duæ A. E. mediæ. C. Quæ omnia erant demonſtranda.



I V.

SI quatuor magnitudines fuerint Arithmeticè proportionales, etiam conuertendo erunt Arithmetice proportionales.

SI enim quatuor magnitudines fuerint Arithmetice proportionales, aut ſuperabunt prima ſecundam & tertia quartam eodem exceſſu, aut ab ijs deficient,aut prima, & ſecunda, item ſecunda & tertia erunt æquales. Si prima ſuperet

ſe-

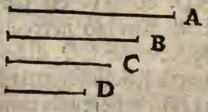
ſecundam eodem exceſſu quo tertia quartam, ſecunda eodem defectu deficiet a prima quo quarta a tertia, eadem enim eſt differentia qua minor a maiori deficit, & qua maior minorem ſuperat. Igitur ex definitione huius Scholij, ſecunda ad primam, & quarta ad tertiam eandem habent rationē Arithmeticam. Si prima eodem defectu deficiat a ſecunda quo tertia a quarta, ſecunda eodem exceſſu ſuperat primam, quo quarta tertiam. Atque ita rurſus habebunt ſecunda ad primā; & quarta ad tertiā proportionem Arithmeticam. Denique ſi prima & ſecunda, item tertia & quarta ſint æquales, conſtat nullam eſſe differentiam inter ſecundā & primam, item nullam inter quartam & tertiam: Quare ſecunda ad primam, & quarta ad tertiam habebunt proportionalitatem Arithmeticam, ex eadem definitione. Quod erat demonſtrandum.

V.

SI quatuor magnitudines fuerint Arithmeticè proportionales, & viciſſim erunt proportionales.

Hæc propoſitio demonſtratur a Federico Commandino, & Chriſtophoro Clauio Lemm. in 80. propoſit. lib. 10. elementorum: ſed breuius hoc modo.

SINT quatuor magnitudines A. B. C. D. Arithmeticè proportionales. Dico quod permutando A. ad. C. & B. ad D. habent rationem Arithmeticam. Nā quoniam A. B. C. D. ſunt in ratione Arithmetica, erunt per primam



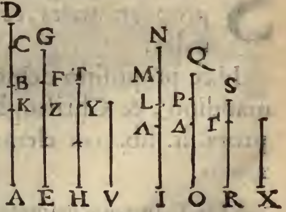
partem primæ huius Scholij, extremæ A. D. medijs B. C. æquales. Rurſus ſtatuantur eędem magnitudines ordine permutato

mutato A. C. B. D. erunt eędem extremæ A. D. ijſdem medijs C.B. æquales. Igitur per ſecundam partem primæ propoſitionis huius Scholij erunt A. C. B. D. in ratione Arithmetica. Quod erat probandum.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

SI ſint quotcumque magnitudines & aliæ ipſis ęquales numero quæ binę in eadem ratione Arithmetica ſumantur, & ex æqualitate in eadem ratione Arithmetica exiſtent.

SINT primum tres magnitudines AD.EG.HT.& aliæ tres IN. OQ. RS. ſintque AD. EG. & IN. OQ. in ratione Arithmetica. Item EG. HT. & OQ. RS. ſint in ratione Arithmetica. Dico quoque ex æqualitate AD. HT. & IN. RS. eſſe in ratione Arithmetica. Sit primæ AD. & ſecundæ EG. differentia DC. Item ſecundæ EG. & tertiæ HT. differentia GF. cui accipiatur æqualis CB. erunt HT. & EF. æquales; item EG. & AC. æquales erunt, ex quibus ſi demantur æquales GF. CB. remanebunt BA. EF. id eſt HT. æquales. Differentia igitur ipſarum AD. & HT. eſt pars BD.



Eodem modo in ſecundis magnitudinibus ſi ſit primæ IN. & ſecundæ OQ. differentia MN. item ſecundæ OQ. & tertiæ RS. differentia PQ. cui æqualis ſumatur ML. erit tota NL. differentia primæ IN. & tertiæ RS. Cum igitur AD. EG.& IN.OQ. ſint in proportionalitate Arithmetica, erunt ex definitione differentiæ CD. MN. æquales. Item quia

EG.

EG. HT. & OQ. RS. ſunt in ratione Arithmetica erunt differentiæ FG. PQ. æquales: ipſi autem FG. eſt æqualis CB. & ipſi PQ. æqualis LM. Si igitur æqualibus DC. MN. æquales addantur CB. ML. erunt totæ DB. NL. æquales; eſt autem oſtenſa DB. differentia primæ AD. & tertiæ HT. & NL. differentia primæ IN. & tertiæ RS. in ſecundis magnitudibus. Igitur AD. HT. & IN. RS. habentes æquales differentias DB. NL. ex definitione ſunt in ratione Arithmetica.

Sed ſint plures magnitudines tribus, ita vt ſint etiam HT. & V. & RS. X. in proportione Arithmetica. Dico adhuc AD. V. & IN. X. eſſe in ratione Arithmetica. Ipſarum enim HT. V. differentia ſit YT. cui æquales ſumantur FZ. BK. & ipſarum RS. X. differentia ſit r S. cui æquales ſumantur P Δ. L Λ. Eodem modo quo in prima parte huius propoſitionis probabimus DK. & N Λ. eſſe differentias ipſarum AD. V. & IN. X. eaſdemque eſſe inter ſe æquales. Igitur AD. V. & IN. X. erunt in ratione Arithmetica. Quod demonſtratum eſſe volebamus.

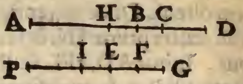
THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI ſint quotcumque magnitudines in ratione Arithmetica, & totidem aliæ ſumantur quæ eandem cum illis proportionem Geometricam habeant, ſingulæ ſingulis: habebunt etiam poſteriores rationem Arithmeticam.

SINT tres magnitudines DA. CA. BA. in ratione Arithmetica & vt DA. ad CA. ita GP. ad FP. & vt CA. ad BA. ita FP. ad EP. Dico etiam GP. FP. EP. eſſe Arithmetice proportionales. Cum enim ſit ex hypotheſi vt DA. ad AC. ita GP. ad PF. erit diuidendo vt DC. ad CA. ita GF. ad FP. Rurſus cum ſit vt CA. ad AB. ex hypotheſi ita FP. ad PE. erit per conuerſionem rationis vt CA. ad CB. ita FP. ad FE.

Quare

Quare ex æqualitate, erit vt DC. ad CB. ita GF. ad FE. Sed CD. CB. ſunt differentiæ triũ quantitatum AD. AC. AB. videlicet CD. ipſarum AD. AC. & BC. ipſarum AC. AB. habentium rationem Arithmeticam ex hypotheſi: æquales igitur ſunt DC. CB. ex definitione, æquales igitur etiam GF. FE. eandem cum illis rationem habentes: Sed etiam FG. FE. ſunt differentiæ trium magnitudinum PG. PF. PE. nimirum FG. ipſarum PG. PF. & EF. ipſarum PF. PE. Igitur etiam tres magnitudines PG. PF. PE. ſunt in ratione Arithmetica.



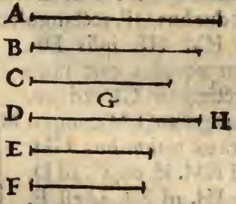
Sint vero plures magnitudines tribus AD. AC. AB. AH. in ratione Arithmetica & ſit prætcrea vt BA. ad HA. ita EP. ad IP. Dico etiam GP. FP. EP. IP. habere rationem Arithmeticam. Nam cum ſint tres magnitudines CA. BA. HA. in ratione Arithmetica [c] quibus Geometrice proportionales ſunt tres FP. EP. IP. conſtat ex prima parte huius propoſitionis differentias HB. BC. tum inter ſe tum differentijs IE. EF. eſſe æquales, æquales autem ſunt BC. CD. & EF. FG. ex prima parte huius. Quare tres differentiæ IE. EF. FG. æquales ſunt, ideoque quatuor quantitates GP. FP. EP. IP. rationem Arithmeticam habent. Quod erat, &c.

THEOREMA X. PROPOS. X.

SI primæ quantitatis ad ſecundam ratio componatur ex ratione tertię ad quartam; & quintę ad ſextam: erit vt prima ad ſecundam, ita tertia ad aliam ad quam quarta eandem rationem habeat quam quinta ad ſextam.

THEO-

Sit ratio A. primæ ad B. ſecundam compoſita ex rationibus C. tertiæ ad DH. quartam, & E. quintæ ad F. ſextam. Fiat vt E. ad F. ita DH. ad aliã quampiam DG. Dico eſſe vt A. ad B. ita C. ad DG. Ratio enim A. ad B. compoſita eſt ex ratione C. ad DH. & E. ad F. ſed vt E. ad F. ita C. ad DG. ex hypoteſi, ergo ratio A. ad B. componitur ex ratione C. ad DH. & DH. ad DG. Ergo, vt A. ad B. ita C. ad DG. Quod demonſtra- oportuit.



COROLLARIVM.

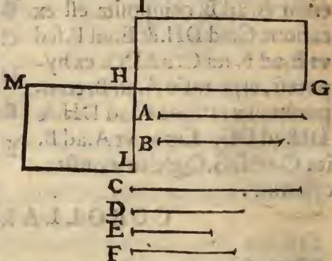
Conſtat etiam, poſitis quæ in propoſitionr, eſſe vt primam ad ſecundam ita quintam ad aliam ad quam ſit ſexta vt tertia ad quartam. Nam quoniam ratio A. ad B. compoſita eſt ex rationibus C. ad DH. & E. ad F. erit ſine diſcrimine compoſita ex rationibus E. ad F. & C. ad DH. eritque E. tertia quantitas, & F. quarta C. quinta DH. ſexta habetque DH. ſexta ad DG. eandem rationem quam E. tertia ad F. quartam. Eſt autem oſtenſum eſſe vt A. ad B. ita C. ad DG. Igitur vt prima A. ad ſecundam B. ita quinta C. ad DG. ad quam DH. ſexta ita ſe habet vt E. tertia ad quartam F.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI primæ quantitatis ad ſecundam ratio componatur ex ratione tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam: eiuſdem primæ ad ſecundam ratio componetur ex ratione tertię ad ſextam, & quintæ ad quartam.

Sit

Sit ratio primæ quantitatis A.ad ſecundam B. compoſita ex ratione tertiæ C.ad quartam D. & quintæ E. ad ſextam F.ſintque ordine vt ſex datæ magnitudines inter ſe,ita lineę A.B.C.D.E.F. Fiat ex duabus C.E.rectangulum GHI.& ex duabus DF. rectangulum LHM.ita vt GH.HI.ipſis C.E. & HM. HL. ipſis DF.
23 .6. ſint æquales erit ratio rectanguli GI. ad rectangulum LM.compoſita ex rationibus GH. ad HM. id eſt C. ad D. & IH. ad HL. id eſt E. ad F. Sed etiam ratio A. ad B. compoſita eſt ex iiſdem rationibus C. ad D. & E. ad F.eadem igitur eſt ratio A. ad B.



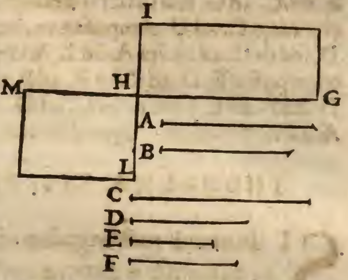
rationi rectanguli GI. ad rectangulum LM. at vero ratio re-
23. 6. ctanguli GI. ad rectangulum LM. etiam componitur ex ratione GH. ad HL. id eſt. C. ad F. & IH. ad HM. id eſt E.ad D. Igitur etiam ratio A. ad B.componitur ex rationibus C. ad F.& E. ad D. Vt autem lineæ A.B.C.D.E.F. ita ponuntur magnitudines A.B.C.D.E.F. Igitur magnitudinum A. B.ratio componitur ex rationibus magnitudinum C. F. & D.E. Quod intendebamus probare.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI primæ quantitatis ad ſecundam ratio componatur ex ratione tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam: etiam conuertendo ratio ſecundæ ad primam componetur ex ratione ſextæ ad quintam, & quartæ ad tertiam:

Sint

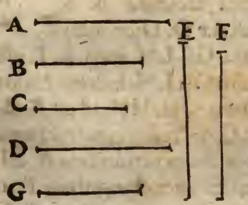
Sint omnia quæ ſuperiori propoſitione. Dico rationem B. ad A. componi ex rationibus F. ad E. & D. ad C. Erit enim conuertendo vt rectangulum LM. ad rectangulũ GI. ita B. ad A. eſt 23. 6. autem ratio rectanguli LM. ad rectangulum GI. compoſita ex rationibus MH. ad HG. id eſt D. ad C. & LH. compoſita ex rationibus MH. ad HG. id eſt D. ad C. & LH. ad HI. id eſt F. ad E. Igitur B. ad A. ratio compoſita eſt ex rationibus D. ad C. & F. ad E. Quod erat demonſtrandum.



THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

SI primæ quantitatis ad ſecundam ratio componatur ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam: etiam ratio tertiæ ad quartam componetur ex rationibus primæ ad ſecundam, & ſextæ ad quintam.

HABEAT A. prima ad B. ſecundam rationem compoſitam ex rationibus. C. tertiæ ad D. quartam, & E. quintæ ad F. ſextam. Dico rationem C. ad D. componi ex rationibus A. ad B. & F. ad E. Fiat enim vt E. ad F. ita D. ad G. Cum proportio A. ad B. ſit compoſita ex ratione C. ad D. & E. ad F. id eſt D. ad G. proportio autem compoſita ex ra-

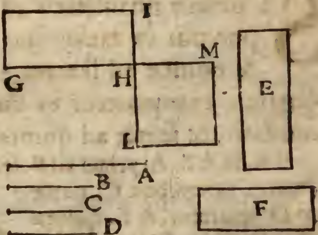


tione C. ad D. & D. ad G. eadem eſt quæ C. ad G. (Nam totum ſuis partibus ſimul ſumptis æquale eſt) erit vt A. ad B. ita C. ad G. Rurſus cum aſſumpta ſit inter C. D. tertia G.
Schol. in defin. 5. 6. erit ratio C. ad D. compoſita ex rationibus C. ad G. & G. ad D. ſed vt C. ad G. ita A. ad B. & vt G. ad D. ita F. ad E. (cum enim poſita ſit D. ad G. vt E. ad F. erit conuertendo vt G. ad D. ita F. ad E.) erit ratio C. ad D. compoſita ex rationibus A. ad B. & F. ad E. Quod demonſtrare oportuit.

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI duorum rectangulorum ratio componatur ex rationibus primæ rectæ ad ſecundam, & tertiæ ad quartam, rectangula ſub prima & tertia, & ſub ſecunda & quarta, erunt datis rectangulis proportionalia.

DVORVM rectangulorum E. F. ratio componatur ex rationibus A. primæ ad ſecundam B. & C. tertiæ ad quartam D. fiatque rectangulum GI. ſub rectis GH. HI. æqualibus primæ A. & tertiæ. C. & rectangulum LM. ſub rectis HM. HL. æqualibus ſecundæ B. & quartæ D. Dico rectangula GI. LM. ipſis E. F. eſſe proportionalia.



23. 6. Rectangula enim GI. LM. habent rationem compoſitam, ex ratione laterum GH. HM. id eſt A. B. & ratione laterum IH. HL. id eſt C. D. ſed etiam rectangula E. F. habent rationem compoſitam ex rationibus A. ad B. & C. ad D. igitur ratio rectanguli E. ad rectangulum F. compoſita ex iiſdem rationibus ex quibus ratio rectanguli GI. ad rectangulum LM. eadem eſt

eſt quæ rectanguli GI. ad rectangulum LM. Quod probandum ſuſceperamus.

THEOREMA XV. PROPOS. XV.

SI duorum rectangulorum ratio componatur ex rationibus primæ rectæ ad quartam, & tertiæ ad ſecundam: rectangula ſub prima & tertia, & ſub ſecunda & quarta erunt datis rectaugulis proportionalia.

DVORVM rectangulorum E. F. ratio componatur ex rationibus A. primæ ad D. quartam,& C. tertiæ ad B. ſecundam, fiatque rectangulum GHI. ſub rectis GH. HI. quæ primæ A. & tertiæ C. ſint æquales, & rectangulum LHM. ſub rectis LH. HM. quæ B. ſecundæ & D. quartæ ſint æquales. Dico rectangula GI. LM. rectangulis E.F. eſſe proportionalia. Rectangula enim GI. LM. habent rationem compoſitam ex ratione GH. ad HL. id eſt A. ad D. & ex ratione IH. ad HM. id eſt C. ad B. ſed etiam rectangula E. F. ponuntur habere rationem compoſitam ex rationibus A. ad D. & C. ad B. Eadem igitur eſt ratio rectangulorum GI. LM. & rectangulorum E. F. Quod à nobis probandum fuerat. 23. 6.

SCHOLIVM.

PTolemæus lib. 1. magnæ constructionis capite, apud Theonẽ, & Trapezuntium 12. apud Rainholdum vndecimo, regulam, quam vocant ſex quantitatum, ingenioſe admodum, vt reliqua omnia, excogitauit; quæ non ſolum in demonſtrationibus ſphæricis, ſed etiam Geometricis magnum momentum obtinere poteſt; vt ex ſequentibus patebit. Cum tamen harum quantitatum plures connexiones ſiue coniugationes eſſe poſſint, ipſe vltra duas progreſſus non eſt, quarum alteram vocat κατὰ σύνθεσιν, *ſeu ſecundum compoſitionem, alteram* κατὰ διαίρεσιν

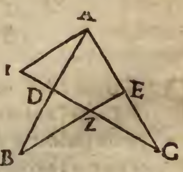
id eſt, ſecundum diuiſionem. Primæ πρότασις huiuſmodi eſt apud Theonem, ex verſione Io. Baptiſtæ Portæ, vt quidem reor non admodum bonam;

Si in duas rectas finitas angulum continentes, ab extremis producantur duæ rectæ ſecantes ſe inuicem, & quæ angulum continent, ratio vnius rectarum, quæ à principio angulum continent, ad ipſam quæ intercipitur ad angulum a producta, coniuncta eſt, ſiue componitur, & ex ratione productæ ab extremo dictæ rectæ, & interceptæ ipſius exceſſus alterius producta, ad alteram rectam continentium angulum, & præterea ratione interceptæ, & a ſectione productarum ad terminum alterius angulum continentium, & ipſius productæ.

Sed breuius, & clarius Regiomontanus Epitomatis lib. 1. propoſitione nona.

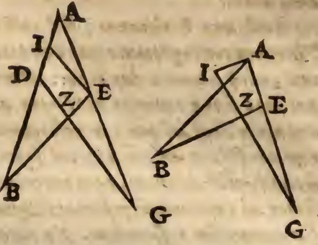
Si a terminis duarum linearum ab angulo aliquo deſcendentium, duæ lineæ ſeſe ſecantes, ſuper deſcendentes mutuo reflexæ fuerint: erit lineæ deſcendentis ad partem ſuam ſuperiorem proportio, ex duabus proportionibus, quarum vna eſt a termino huius deſcendentis reflexæ, ad partem eius ſupra ſectionem, alia eſt partis infra ſectionem alterius reflexæ, ad totam eandem reflexam compoſita.

Ἔκθεσιν ac διορισμόν habent Ptolemæus, & Theon quæ intelligi non poſſunt ſine oculari inſpectione diagrammatis, magis ad amuſſim Regiomonianus. Ab angulo A. deſcendāt duæ lineæ AB. AG. à terminis earum B. G. quæ reflectantur mutuo ſuper deſcendentes, quæ ſint BE. GD. ſecantes ſe in Z. Dico quod proportio GA. ad AE. compoſita eſt ex duabus ſcilicet proportione GD. ad DZ. & proportione ZB. ad BE.



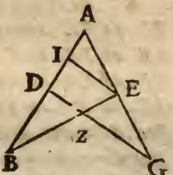
Κατασκευὴ & ἀπόδειξις eſt Ptolomæi, ex verſione Rainholdi. Ducatur per punctum E. linea EI. æquidiſtans lineæ GD. Quoniam igitur lineæ GD. EI. ſunt æquidiſtantes, ratio lineæ
4. 6. *GA. ad AE. eadem eſt quæ lineæ GD. ad lineam EI. Aſſumatur*

tur autem deforis linea ZD. Erit igitur compoſita ratio lineæ GD. ad lineam EI. ex ratione GD. ad lineam DZ. & ex ratione lineæ DZ. ad lineam EI. Quare & ratio lineæ GA. ad lineam AE. compoſita eſt ex ratione lineæ GD. ad lineam DZ. & ex ratione linaa DZ. ad lineam EI. Eſt autem & ratio



linæ DZ. ad EI. eadem rationi lineæ ZB. ad lineam BE. cum æquidiſtantes ſint lineæ EI. & ZD. Ratio igitur lineæ GA. ad lineam AE. compoſita ex eſt ex ratione lineæ GD. ad lineam DZ. & ex ratione lineæ ZB. ad lineam BE. Quod erat demonſtrandum. 4. 6.

Eodem modo demonſtrabitur quod & ſecundum diuiſionem ratio lineæ GE. ad lineam EA. compoſita eſt ex ratione lineæ GZ. ad ZD. & ex ratione lineæ DB. ad BA. Ducta per A. punctum linea AI. æquidiſtante lineæ EB. & protracta in eandem GDI. Rurſus enim quoniam linea AI. æquidiſtans eſt lineæ EZ. eſt ſicut GE. ad EA. Sic GZ. ad ZI. Aſſumpta autem deforis linea ZD. ratio lineæ GZ. ad ZI. componitur ex ratione lineæ GZ. ad lineam ZD. & ratione lineæ DZ.



ad lineam ZI. Eſt autem ratio lineæ DZ. ad lineam ZI. eadem quæ eſt ratio DB. ad BA. eo quod in æquidiſtantes lineas AI. & ZB. ductæ ſint lineæ BA. & ZI. Quare ratio lineæ GZ. ad lineam ZI. componitur ex ratione lineæ GZ. ad lineam ZD. & ex ratione lineæ DB. ad lineam BA. Porro ratio lineæ GE. ad EA. eadem eſt quæ lineæ GZ. ad lineam ZI. Ergo ratio lineæ GE. ad lineam EA. componitur ex ratione lineæ GZ. ad lineam ZD.

ZD. & ex ratione lineæ DB. ad lineam BA. Quod demonſtrandum erat.

Hactenus Ptolemæus; ſed recte admonet Rainholdus poſt Theonem coniugationis κατὰ σύνθεσιν *quadruplicem eſſe varietatē,* κατὰ διαίρεσιν, *duplicem. Nam ſecundum compoſitionem, aut tota linea exterior confertur ad partem ſuperiorem verſus angulum, aut ad partem inferiorem ab angulo; aut tota interior confertur ad partem vel ſuperiorem, vel inferiorem. At ſecundum diuiſionem, tam exterioris, quam interioris pars inferior ad ſuperiorem refertur. Quibus omnibus ſingulæ* ἀνάπαλιν *ſeu conuerſim reſpondent. Vt exterior GA. confertur aut cum AE. aut cum EG. & tota interior, GD. aut cum DZ. aut cum GZ. aut exterioris pars inferior GE. ad ſuperiorem EA. aut interioris pars inferior GZ. ad ſuperiorem ZD. & conuertendo. Singuli autem caſus demonſtrantur directi quidem a Theone, etiam conuerſi a Rainholdo. Nempe*

1. *Ratio GA. ad AE. componitur ex ratione GD. ad DZ. & BZ. ad BE.*
2. *Ratio AG. ad GE. componitur ex ratione AD. ad DB. & BZ. ad ZE.*
3. *BE. ad EZ. ex ratione BA. ad AD. & DG. & ad GZ.*
4. *EB. ad BZ. ex EA. ad AG. & GD. ad PZ.*
5. *GE. ad EA. ex GZ. ad ZD. & DB. ad BA.*
6. *BZ. ad ZE. ex BD. ad DA. & AG. ad GE.*

Sed Alkindus Arabs, & ab eo Rainholdus, animaduertit, in ſingulis modis quos ſuperius poſuimus, 180. coniugationes directe fieri poſſe, totidem ἀνάπαλιν *ex quibus ſoli 36. ſint vtiles ac neceſſarij, 12. impoſſibiles, reliqui inutiles, atque horum 36. modorum octodecim, eſſe reliquorum conuertentes, Modi autem neceſſarij in ſex quibuslibet quantitatibus in quibus primæ ad ſecundam ratio componatur ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam. hac tabula continentur.*

Tabula

Tabula 18. modorum neceſſariorum.

Primus	1. ad	2. ex	3. ad	4. &	5. ad	6.
II.	1	2	3	6	5	4
III.	1	3	2	4	5	6
IV.	1	3	2	6	5	4
V.	1	5	2	6	3	4
VI.	1	5	2	4	3	6
VII.	2	4	1	3	6	5
VIII.	2	4	1	5	6	3
IX.	2	6	1	5	4	3
X.	2	6	1	3	4	5
XI.	3	4	1	2	6	5
XII.	3	4	1	5	6	2
XIII.	3	6	1	2	4	5
XIV.	3	6	1	5	4	2
XV.	4	5	2	1	3	6
XVI.	4	5	2	6	3	1
XVII.	5	6	1	2	4	3
XVIII.	5	6	1	3	4	2

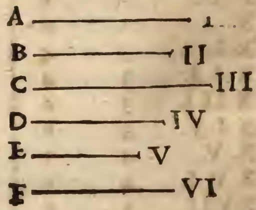
Horum autem modorum primum Ptolemeus in prima coniugatione ſex prædictarum quantitatum; ſeptimum, octauum, vndecimum, decimum ſeptimum Rainholdus; reliquos omnes nos aliquando totidem theorematis demonſtrauimus; ſed nunc, quod mirum videri poſſit, & quod vix fieri poſſe quis credat omnes ſequenti propoſitione complexi ſumus.

THEO-

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

DAtis ſex quantitatibus quarum primæ ratio ad ſecundum componatur ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam; omnes modos neceſſarios, quibus ratio duarum quarumlibet, ex aliarum rationibus componitur, demonſtrare.

Sint datæ ſex quantitates. A.B.C.D.E.F. in quibus ratio A. primæ, ad B. ſecundam, ſit compoſita ex ratione C. tertię, ad D. quartam, & E. quintæ, ad F. ſextam; propoſitum ſit demonſtrare, proportiones ſex illarum quantitatum, octodecim modis, quos in tabulam ſuperiori ſcholio redegimus, directè, totidemque conuerſim componi poſſe.



Quoniam ratio A. ad B. componitur ex ratione C. ad D. &
13.3.huius. E. ad F. per primum modum datum, etiam ratio C. ad D.
13.3.huius. componetur ex ratione A. ad B. & F. ad E. qui vndecimus modus eſt. Item quia ratio A. ad B. componitur ex rationibus E. ad F. & C. ad D. etiam ratio E. ad F. componetur ex ratione A. ad B. & D. ad C. qui eſt modus decimus ſeptimus, atq; ita exiſtunt tres modi in quibus ratio

A.		B.		C.	D.	E.	F.	I.
C.	ad	D.	ex ratione	A.	ad B.	& F. ad	E.	11.
E.		F.		A.	B.	D.	C.	17.

componitur; Iam vero in vnoquoque horum modorum ſex magnitudines pro ordine quem obtinent ordinalibus numeris

numeris inſigniantur; ita vt in primo ſit A. prima quantitas, B. ſecunda, C. tertia, &c. In ſecundo C. prima, D. ſecunda, A. tertia B. quarta F. quinta E. ſexta, atque ita in reliquo, E. prima, F. ſecunda &c. Quoniam ratio A. ad B. componitur ex rationibus. C. ad D. ex E. ad F. etiam ratio A. ad B. componetur ex rationibus C. ad F. & E. ad D. qui ſecundus modus eſt; præterea quia ratio C. ad D. componitur ex rationibus A. ad B. & F. ad E. etiam ratio C. ad D. componetur ex rationibus A. ad E. & F. ad B. qui duodecimus modus eſt. Adhæc quia ratio E. ad F. componitur ex rationibus A. ad B. & D. ad C. eadem ratio E. ad F. componetur ex rationibus A. ad C. & D. ad B. qui eſt modus decimus octauus. 11.3.huius. 11.3.huius. 11.3.huius.

A.	B.		C.	F.	E.	D.		2
C. ad	D.	ex ratione	A. ad	E. &	F. ad	B.		12
E.	F.		A.	C.	D.	B.		18

Rurſus in vnoquoque horum modorum ſex magnitudines pro ordine quem habent ordinali numero affectæ intelligantur. Quoniam ratio A. ad B. conſtat ex rationibus C. ad F. & E. ad D. etiam ratio C. ad F. conſtabit ex rationibus A. ad B. & D. ad E. qui eſt modus 13. Item quoniam ratio C. ad D. conflatur ex rationibus A. ad E. & F. ad B. etiam ratio A. ad E. conflabitur ex rationibus C. ad D. & B. ad F. qui eſt modus quintus. Denique quia ratio E. ad F. componitur ex ratione A. ad C. & D. ad B. etiam ratio A. ad C. componetur ex rationibus E. ad F. & B. ad D. qui conſtituit tertium modum tabulæ. 13.3.huius. 13.3.huius. 13.3.huius.

C	F.	A.	B.	D.	E.				13.
A ad	E. ex	C. ad	D. &	B. ad	F.				5.
A.	C.	E.	F.	B.	D.				3.

Præterea quia in proximis modis ratio primæ & ſecun-

dæ, componitur ex rationibus tertiæ & quartæ, & ratione
11.3.huius. quintæ & ſextæ; probabimus ex ſexta propoſitione tertij huius, quod ratio C. ad F. componitur ex rationibus A. ad E. & D. ad B. qui eſt modus decimus quartus. Item ratio A.
11.3.huius. ad E. componitur ex rationibus C. ad F. & B. ad D. qui eſt
11.3.huius. modus ſextus tabulæ; denique ratio A. ad C. componitur ex rationibus E. ad D. & B. ad F. qui modus eſt quartus in tabula.

C.		F.		A.		E.		D.		B.	14.
A.	ad	E.	ex	C.	ad	F.	&	B.	ad	D.	6.
A.		C.		E.		D.		B.		F.	4.

13.3.huius. Eodem modo, quo ſupra, ex ſeptima tertij huius, omiſſo primo trium poſteriorum modorum, ex quo nihil noui amplius demonſtrari poteſt, quoniam in ſecundo, ratio A.
13.3.huius. ad E. componitur ex rationibus B. ad D. & C. ad F. etiam ratio B. ad D. componetur ex rationibus A. ad E. & F. ad C. qui octauum modum tabulæ conſtituit; præterea quia in tertio ratio A. ad C. conſtituitur ex rationibus B. ad F. &
13.3.huius. E. ad D. etiam ratio B. ad F. conſtituetur ex rationibus A. ad C. & D. ad E. qui modus eſt decimus tabulæ.

B.		D.		A.		E.		F.		C.	8.
	ad		ex		ad		&		ad		
B.		F.		A.		C.		D.		E.	10.

11.3.huius. Eadem ratione, ex 6. tertij huius ratio B. ad D. componitur ex rationibus A. ad C. & F. ad E. qui eſt ſeptimus mo-
11.3.huius. dus, & ratio B. ad F. componitur ex rationibus A. ad E. & D. ad C. qui eſt nonus modus. At vero ex 7. tertij huius. Quoniam ratio B. ad F. componitur ex rationibus A. ad C.
13.3.huius. & D. ad E. etiam ratio D. ad E. componetur ex rationibus B. ad F. & C. ad A. qui 16. modus eſt in tabula.

B.

B.	D.	A.	C.	F.	E.	7
B. ad F.	ex	A. ad E.	&	D. ad C.		9
D.	E.	B.	F.	C.	A.	16

Denique in vltima ſerie quia ratio D. ad E. conſtat ex rationibus B. ad F. & C. ad A. ex propoſitione 12. 3. huius ratio D. ad E. conſtabit ex rationibus B. ad A. & C. ad F. qui eſt 15. modus. 11.3.huius.

D. ad E. ex B. ad F. & C. ad A. | 15.

Atque ita datis ſex quantitatibus, quarum primæ ratio ad ſecundam componatur ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam, omnes modos neceſſarios directos quibus ratio duarum quarumlibet ex aliarum rationibus componitur demonſtrauimus.

Conuertentes autem ſuperiorum modorum, ex 12. huius aperte demonſtrantur; nam in omnibus ſi fuerit primæ ad ſecundam ratio compoſita ex rationibus tertiæ ad quartam, & quintæ ad ſextam, etiam ratio ſecundæ ad primam componetur ex ratione quartæ ad tertiam, & ſextæ ad quintam. Quare etiam ſuperiorum modorum conuertentes demonſtrauimus; Quod propoſitum fuerat. 12.3.huius.

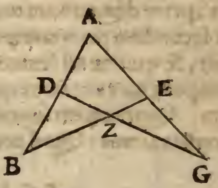
SCHOLIVM.

Hinc patet quam facilius, nnn ſolum modi omnes in Ptolomei prima coniugatione ſex quantitatum, vnica propoſitione demonſtrentur, quam infinitis, à Rainholdo comment. in c. 11. primi magnæ conſtructionis; ſed reliqui reliquarum quinque coniugationum modi, de quibus in Scholio præcedentis propoſitionis, ac omnino omnes compoſitiones rationum neceſſariæ, quæ inter ſex quaslibet quantitates exiſtant: quod ingens compendium eſt, ac ni fallor magnum in Geometricis vſum habebit.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

SI prima recta & ſecunda angulum faciant à quarum etremitatibus ducantur tertia ab extremitate primæ, & quarta ab extremitate ſecundæ in punctum concurrentes, & in oppoſitas rectas quæ angulum prius faciebant, incidentes, ita vt quarta primam bifariam diuidat: erit vt prima incidentium ad ſegmentum ſuperius, ita incidentium ſecunda ad medietatem ſegmenti inferioris.

FACIAT prima AG. cum ſecunda AB. angulum ad A. & ab extremitatibus primæ & ſecundæ G. & B. ducantur GD. tertia & BE. quarta concurrentes in puncto. Z. & ſecet GD. oppoſitam rectam AB. in D. & BE. oppoſitam AG. bifariam in E. Dico eſſe vt GD. ad DZ. ita EB. ad medietatem ipſius BZ. Vocentur autem AG. prima quantitas AB. ſecunda GD. incidentium prima: BE. incidentium ſecunda. Z. punctũ concurſus. EA. DA. ZE. ZD. ſegmenta ſuperiora. ZG. ZB.



EG. DB. ſegmenta inferiora. Quoniam ratio GA. ad AE. cõponitur ex rationibus GD. ad DZ. & BZ. ad BE. vt ex Ptolemæo probauimus in Scholio 15. huius, etiam ratio GD. ad DZ. componetur ex rationibus GA. ad AE. & EB. ad BZ. id eſt ex rationibus EB. ad BZ. & GA. ad AE. Igitur cum primæ GD. ad ſecundam DZ. ratio componatur ex rationibus tertiæ EB. ad quartam BZ. & quintæ AG. ad ſextã AE. erit vt GD. ad DZ. ita EB. ad aliam ad quam ſit quarta BZ. vt GA. quinta ad ſextam AE. Sed GA. ad AE. ex hypotheſi

Schol. 15. huius. 13. huius. 10. 3. huius.

habet

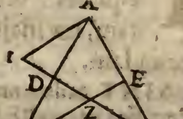
habet rationē duplam, ergo vt GD. ad DZ. ita EB. ad aliam ad quam BZ. habet proportionem dnplam, id eſt ad dimidiam ipſius BZ. Quod erat propoſitum.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

IIſdem poſitis: erit vt ſegmentum ſecundæ quantitatis ſuperius, ad inferius, ita ſegmentum ſuperius ſecundæ incidentium ad medietatem inferioris.

SINT eadem quæ ſuperiori propoſitione. Dico eſſe vt AD. ad DB. ita ZE. ad medietatem ipſius BZ. Quoniam ratio AG. ad GE. conſtat ex ratione AD. ad DB. & BZ. ad ZE. Quod demonſtrat Theon ſexta prop. in 12. caput 1. Almageſti, & Eraſmus Rainholdus in idem caput (quod ipſe vndecimum ſtatuit) propoſit. 2. & nos ſequenti Scholio ex illis authoribus demonſtrabimus; erit etiam ratio 13.3. huius. AD. ad DB. compoſita ex ratione AG. ad GE. & ZE. ad BZ. ſeu quod idem eſt ex rationibus ZE. ad BZ. & AG. ad GE. Igitur vt AD. ad DB. ita ZE. ad aliam ad 10.3. huius. quam BZ. habeat rationem quam AG. ad GE. ſed AG. ipſius GE. ponitur dupla. Igitur vt AD. ad DB. ita ZE. ad eam cuius BZ. ſit dupla, id eſt, ad dimidiam BZ. Quod ſtatutum fuerat demonſtrare.

SCHOLIVM.



QVod vero ratio AG. ad GE. componatur ex rationibus AD. ad DB. & BZ. ad ZE. ita ex ſupradictis auctoribus demonſtratur. Sit enim vt in Scholio 15. huius figura 2. æquidiſtans AI. recta EB. & producatur ad ipſam GDI. erit ratio AG.

GE.

GE. eadem rationi AI. ad EZ. & aſſumpta BZ. erit ratio AI. ad EZ. hoc eſt. AG. ad GE. compoſita ex rationibus AI. ad BZ. & BZ. ad ZE. eſt autem ratio AI. ad BZ. eadem rationi AD. ad DB. Igitur ratio AG. ad GE. conſtat ex rationibus AD. ad DB. & BZ. ad ZE.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

IIſdem poſitis: erit vt ſecunda quantitas ad ſegmentum inferius, ita ſegmentum inferius primæ incidentium ad ſuperius.

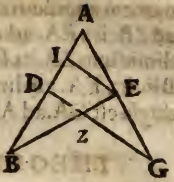
SINT eadem quæ 17. huius. Dico eſſe vt BA. ad DB. ita GZ. ad ZD. Quoniam ratio GE. ad EA. componitur rationibus GZ. ad ZD. & DB. ad BA. vt ex Ptolemæi c. 12. magnæ ſyntaxeos probauimus ſchol. 15. huius, etiam ratio
13.3. huius. GZ. ad ZD. componetur ex rationibus GE. ad EA. & BA. ad BD. ſeu quod idem eſt ex rationibus BA. ad DB. & GE.
10.3. huius. ad EA. Igitur vt GZ. ad ZD. ita BA. ad aliam ad quam DB. habeat eam rationem quam GE. ad EA. ſed GE. ponitur æqualis ipſi EA. Ergo vt GZ. ad ZD. ita BA. ad æqualem ipſi DB. nimirum ad ipſam DB. Quod concludere volebamus.

THEOREMA XX. PROPOS. XX.

IIſdem poſitis, ſint præterea anguli BEA. BDG. æquales: erit vt prima quantitas ad ſecundam, ita incidentium prima ad incidentium ſecundam.

SINT eadem omnia quæ in ſchemate 17. huius, & præterea ſint anguli BEA. BDG. æquales: Dico eſſe vt GA. ad AB. ita GD. ad BE. Ducatur EI. ipſi GD. parallela. Hinc ad duas GD. BE. conſtituatur tertia IE. erit ratio GD. ad IE.

com-



compoſita ex rationibus GD. ad BE.& BE.ad IE. Rurſus inter GA. AE. ponantur duæ intermediæ BZ. ZD.erit ratio GA.ad AE. cōpoſita ex tribus rationibus GA. ad BZ. & BZ. ad ZD. & ZD. ad AE. vt vero GA. ad AE.ita GD.ad IE. (æquiangula enim ſunt triangula GAD. EAI. ob parallelas IE.GD. quæ efficiunt angulos externos IEA. EIA. æquales internis AGD. ADG.) Quare ex duabus proportionibus æqualibus GD.ad IE. & GA. ad AE. prima ex duabus rationibus GD. ad BE. & BE. ad IE. compoſita eſt; ſecunda ex tribus GA. ad BZ. & BZ. ad ZD. & ZD. ad AE. compoſita eſt, æquales igitur ſunt duæ rationes GD.ad BE.& BE.ad IE.tribus rationibus GA.ad BZ.& BZ.ad ZD. & ZD.ad AE. (æqualium enim quantitatum æquales ſunt omnes partes ſimul ſumptæ.) Igitur ex duabus primis rationibus auferatur ratio BE. ad IE. & ex tribus poſterioribus ratio BZ. ad ZD. quæ æqualis ſeu eadem eſt rationi BE. ad IE. (æquiangula enim ſunt triangula BEI. BZD. ob communem angulum ad B. & ob duas paeallelas DZ. IE. quæ efficiunt angulos externos BDZ.BZD. æquales internis BIE. BEI.) remanet ratio GD. ad BE. æqualis rationibus GA.ad BZ. & ZD. ad AE. Cum igitur ratio GD. primæ ad BE.ſecundam ſit compoſita ex rationibus GA.tertiæ ad BZ. quartam,& ZD.quintæ ad AE.ſextam,etiam ratio GD. primæ ad BE.ſecundam, (ex 11.huius) componetur ex rationibus GA. tertiæ ad AE. ſextam, & ZD. quintæ ad BZ. quartam, ſeu quod idem eſt ratio GD. ad BE. componetur ex rationibus ZD. ad BZ. & GA. ad AE. Igitur vt GD. ad BE.ita ZD.ad aliam ad quam BZ.ſit vt GA. ad AE. (ex 10. tertij huius.) Sed GA.eſt ipſius AE.dupla, ſeu AE. eſt ipſius GA.dimidia : igitur vt GD.ad BE. ita ZD.ad dimidiam ipſius BZ. Sed vt ZD.ad dimidium BZ.ita EA.ad dimidium AB. (æquiangula enim ſunt triangula BDZ. BEA.ob com-

munem

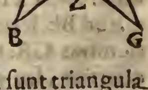
4. 6.
29. 1.
29. 1.
11.3.huius.
10.3.huius.
32. 1.

munem angulum ad B. & æquales ad D. E. ideoque vt DZ.
15. 5. ad ZB. ita EA. ad AB. & conſequentium dimidia vt DZ.ad
dimidium ZB.ita EA.ad dimidium AB.) Igitur vt GD.ad
15. 5. BE. ita EA. ad dimidium AB. & poſteriorum terminorum
dupla eſt GA.ad AB. vt GD.ad BE. Quod &c.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

IIſdem poſitis, ſint præterea anguli BEA.BDG. æquales: erit vt ſecunda quantitas ad incidentium ſecundam, ita ſegmentum ſuperius incidentium ſecundæ ad dimidium ſegmenti ſuperioris quantitatis ſecundæ.

SINT eadem omnia quæ ſuperiori propoſitione. Dico
3. 6. eſſe vt BA.ad BE. ita ZE. ad medietatem DA. Quoniam pa-
rallelæ ſunt IE. DZ. ex hypotheſi, erit vt BZ.ad ZE.ita BD.
ad DI.aſſumatur extrinſecus media DA.conſtabit ratio BD.
3.& 4.6. ad DI. id eſt BZ.ad ZE. ex rationibus BD.ad DA.& DA.ad
DI. vt autem AD. ad DI. ita AG. ad GE.
Igitur ratio BZ. ad ZE. compoſita eſt ex
ratione BD ad DA. & ex AG. ad GE.
16.3.huius. Quare per tertium modum 16. huius erit
ratio BZ. ad BD. compoſita ex rationibus
10.3. huius. ZE. ad DA. & AG. ad GE. Igitur vt BZ.
ad BD. ita ZD. ad medietatem DA. ad
quam integra DA. rationem habet quam
AG. ad ſui dimidium GE. Vt autem BZ.



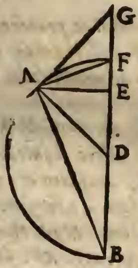
ad BD.ita BA. ad BE. (æquiangula enim ſunt triangula
32. 1. BDZ.BEA.ob communem angulum ad B.& angulos BDZ.
BEA.qui æquales ponuntur.) Igitur vt BA.ad BE.ita ZE.
ad medietatem DA. Quod erat &c.

THEO-

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

CHordæ duorum arcuum inæqualium ſemicirculum complentium, eamdem habent rationem quam ſecans arcus minoris cum ſinu toto ad tangentem eiuſdem arcus, aut quam tangens ad differentiam ſecantis.

SIT circulus FAB. cuius centrum D. diameter BF. arcus minor FA. maior ſemicirculum complens AB. Chorda arcus minoris AF. maioris AB. ſinus totus DA. Tangens eiuſdem arcus FA. recta GA. ducta ex puncto A. ad punctum G. in diametro producta; ideoque DG. ſecans arcus FA. & GF. eius differentia FE. ſinus rectus AE. verſus FE. complementi ED. & recta BG. compoſita ex ſinu toto BD. & ſecante DG. Dico eam eſſe rationem BA. ad AF. quæ eſt BG. ad GA. aut GA. ad GF. Erunt enim triangula BAF. & GAD. rectan- 31.& 18. 3.



gula ad A. quæ diuidentur perpendiculari AE. communi ad 8. 6.
baſim in triangula ſimilia, eritque vt BE. ad EA. ita EA. ad 4. 6.
FE. ideoque quadratum AE. tam rectangulo BEF. quam rectangulo GED. æquale eſt. 17. 6. Igitur æqualia ſunt rectangula 1. pron.
la BEF. GED. atque adeo vt BE. ad ED. ita GE. ad EF. & 14. 6.
diuidendo vt BD. ad DE. ita GF. ad FE. ſed vt BD. ad DE. ita AD. ad DE. quod æquales ſint, BD. AD. & vt AD. ad 15. defin.
DE. ita GA. ad AE. ergo vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. & 8 6.
permutando, ac conuertendo, vt GA. ad GF. ita AE. ad 11. 5.
EF. ſed vt AE. ad EF. ita BA. ad AF. ergo vt GA. tangens 8. 6.
arcus AF. ad GF differentiam ſecantis, ita chorda BA. ad chordam AF. Rurſus cùm rectangulum BGF. ſit æquale 36. 6.
quadrato GA. erit vt AG. ad GF. ita BG. ad GA. ideoque vt 14. 6.

chorda BA. ad chordam AF. ita BG. compoſita ex ſinu toto, & ſecante arcus AF. ad GA. tangentem eiuſdem arcus AF. Quod erat propoſitum.

COROLLARIVM. I.

Ex dictis manifeſtum eſt eſſe vt ſinum totum ad ſinum complementi arcus, ita differentiam ſecantis ad ſinum verſum. probatum enim eſt eſſe vt BD. ad DE. ita GF. ad FE.

COROLLARIVM. II.

Conſtat præterea eſſe vt tangentem ad ſinum rectum, ita differentiam ſecantis ad ſinum verſum eiuſdem arcus. Nam demonſtratum eſt eſſe vt GF. ad FE. ita GA. ad AE.

COROLLARIVM. III.

Adhæc ſequitur ſi ex eodem puncto circuli ad diametrum, eiuſdem arcus tangens, chorda, atque ſinus ducantur; angulum à tangente & ſinu recto contentum à chorda ſecari bifariam. Nam cum ex eodem puncto A. ad diametrum ductæ ſint AG. AE. AF. ſitque vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. angu-
3. 6. *lus GAE. diuiditur bifariam à chorda AF.*

COROLLARIVM. IV.

Denique probatum eſt eſſe vt BG. ad GA. ita GA. ad GF.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

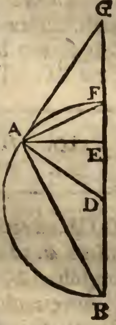
Quadratum circulo inſcriptibile ad quadratum chordæ arcus Quadrante minoris rationem habet quam ſecans eiuſdem arcus ad ſuam differentiam; aut quam ſinus totus ad ſinum verſum.

SINT

Sint eadem quæ ſuperiori propoſitione. Dico eſſe quadratum circulo inſcriptibile ad quadratum cordæ AF. arcus AF. quadrante minoris, vt eſt ſecans eiuſdem arcus AF. ad GF. eiuſdem ſecantis differentiam; aut vt eſt DF. ſinus totus ad FE. ſinum verſum: Nam cum ſit vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. & AD. hoc eſt FD. ad DE. & GD. ad DA. id eſt ad DF. erit vt FD. ad DE. ita GD. ad DF. & per conuerſionem rationis vt DF. ad FE. ita DG. ad DF. Aſſumantur duæ BF. BF. ſeu eadem BF. bis, erit per primam tertij huius vt rectangulum ſub BF. DG. ad rectangulũ ſub BF. GF. ita rectangulum ſub BF. DF. ad rectãgulum ſub BF. FE. ſed vt rectangulum ſub BF. DG. ad rectangulum ſub BF. GF. ita DG. ad GF. ergo vt DG. ad GF. ita rectangulum BFD. ad rectangulum BFE. at vero rectangulo BFD. æquale eſt quadratum circulo inſcriptibile, cum vtrumque quadrati DF. ſit duplum, & rectangulo BFE. æquale eſt quadratum AF. Igitur vt DG. ſecans arcus AF. ad FG. ſecantis differentiam, ita Quadratum circulo inſcriptibile, ad Quadratum chordæ FA. Vt autem DG. ad GF. ita oſtenſum eſt paulo ante eſſe DF. ſinum totum ad EF. ſinum verſum: vt ergo DF. ad EF. ita quadratum circulo inſcriptibile, ad quadratum chordæ FA. Quod erat &c.

Coroll. 1.
22.3. huius.
8. 6.
11. 5.
1.3. huius.
1. 6.
8.& 17. 6.

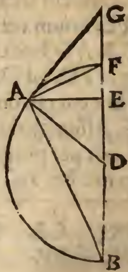
DG.	GF.	DF.	FE.
BF.	BF.		



THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

Quadratum chordæ ad quadratum tangentis eiuſdem arcus eſt vt quadratum circulo inſcriptibile ad rectangulum ſub ſecante eiuſdem arcus, & ſecante cum ſinu toto.

SINT eadem quæ duabus ſuperioribus propoſitionibus. Dico eſſe quadratum chordæ AF. ad quadratum tangentis AG. vt quadratum circulo inſcriptibile ad rectangulum BGD. contentum ſecante DG. & ſecante cum ſinu toto, BG. Nam
Coroll. 2. cum ſit vt GF. ad F*E*. ita GA. ad
22.3. huius. A*E*. id eſt G*D*. ad *D*A. ſeu G*D*. ad
8. 6. 1.3. huius. ad *D*F. ſi aſſumantur BG. BF. erit vt rectangulum BG. G*D*. ad rectangulum BF. *D*F. ita rectangulum



G*D*.	*D*F.	GF.	F*E*.
BG.	BF.		

BG. GF. ad rectangulum BF. *FE*. & conuertendo erit rectangulũ *BFD*. ad rectangulum *B*G*D*. vt rectangulũ *BFE*. ad rectangulum *B*GF. Sed rectangulo *BFD*. æquale eſt quadratum circulo inſcriptibile, vt conſtat ex progreſſu ſuperioris
8. & 17. 6. propoſitionis, & rectangulo *BFE*. eſt æquale quadratum
36. 3. FA. & rectangulo *B*GF. quadratum GA. Igitur erit vt quadratum circulo inſcriptibile ad rectangulum *B*G*D*. ita quadratum AF. ad quadratum AG. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

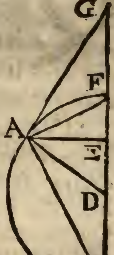
EX demonſtratis conſtat eſſe vt rectangulum BFD. ad rectangulum BGD. ita quadratum FA. ad quadratum GA. Nam probatum eſt eſſe vt rectangulum BFD. ad rectangulum BGD. ita rectangulum BFE. id eſt quadratum AF. ad rectangulum BGF. id eſt quadratum GA.

THEO-

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

QVadratorum chordarum inæqualium ſemicirculum complentium maius ad minus rationem habet quam ſinus totus compoſitus cum ſinu complementi arcus cui minor chorda ſubtenditur, ad ſinum verſum eiuſdem arcus, & quam ſecans eiuſdem arcus compoſita cum ſinu toto ad differentiam ſecantis.

Supponantur adhuc ſuperiora diagrammata. Dico qua-
dratum BA. ad quadratum AF. eſſe vt BE. ad EF. & vt BG. Coroll. 2.
ad GF. Cum enim ſit vt EF. ad GF. ita EA. ad AG. & per- 22.3.huius.
mutando vt EF. ad EA. id eſt EA. ad EB. ita
FG. ad AG. ſed eſt etiam vt FG. ad AG. ita Coroll. 4.
GA. ad GB. erit ergo vt EA. ad EB. ita GA. ad 22.3.huius.
GB. & permutando vt EA. ad GA. id eſt EF. 11. 5.
ad FG. ita EB. ad GB. & permutando ac con-
uertendo vt BE. ad EF. ita BG. ad GF. Rurſus
cum quadrato BA. ſit æquale rectangulum
FBE. & quadrato FA. rectangulum BFE. ha- 8.&17.6.
beantque dicta rectangula communem baſim
BF. erunt vt altitudines BE. EF. Igitur vt BE.
ad EF. ita rectangulum FBE. ad rectangulum
BFE. id eſt quadratum BA. ad quadratum AF.
ſed etiam paulo ante oſtenſum eſt eſſe vt BE.
ad EF. ita BG. ad GF. ergo vt BG. ad GF. ita quadratum
BA. ad quadratum AF. Quod propoſitum fuit demonſtrare.



COROLLARIVM. I.

HInc patet eſſe vt quadratum ſinus totius ad quadratum tangentis arcus, ita ſinum complementi dicti arcus ad differentiam ſinus complementi & ſecantis. Nam ſi ponatur

BA.

BA. ſinus totus in triangulo rectangulo AEB. erit AF. tangens anguli ABF. & BF. ſecans eiuſdem anguli, & BE. ſinus rectus anguli BAE. qui eſt complementum anguli ABF. & EF. differentia ſecantis BF. & ſinus complementi BE. eſt autem probatum eſſe vt quadratum BA. ad quadratum AF. ita BE. ad EF.

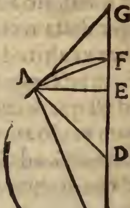
COROLLARIVM. II.

COnſtat etiam eſſe vt BE. ad EF. ita BG. ad GF. hoc enim in progreſſu demonſtrationis oſtendebamus.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

QVadratum tangentis arcus Quadrante minoris ad quadratum ſinus totius rationem habet quam rectangulum ſub aggregato ſinus totius, & ſecantis ac ſinu verſo, ad rectangulum ſub ſinu toto, & ſinu complementi.

SINT eadem omnia quæ ſuperioribus propoſitionibus. Dico eſſe quadratum AG. ad quadratum AD. vt rectangulum ſub BG. FE. ad rectangulum BDE.
Coroll. 2. 22.3. huius. 8. 6. 13. 5. Quoniam eſt vt GF. ad FE. ita GA ad AE. id eſt AD. ad DE. id eſt FD. ad DE. erit vt GF. ad FE. ita FD. ad DE. & permutando vt GF. ad FD. ita FE. ad DE. Aſſumantur
1.3. huius. duæ BG. BD. erit vt rectangu-



GF.	*FD.*	*FE.*	*DE.*
BG.	*BD.*		

lum ſub BG. GF. ad rectangulum ſub BD. FD. ita rectangulum ſub BG. FE. ad rectangulum ſub BD. DE. ſed rectangulo

gulo

gulo BGF. eſt æquale quadratum AG. & rectãgulo ſub BD. 36. 3.
FD. quadratum AD. vt igitur quadratum AG. ad quadratum AD. ita rectangulum BG. EF. ad rectangulum BDE. Quod intendebamus demonſtrare.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

SInus verſus ad ſinum totum cum ſecante rationẽ habet, quam rectangulũ ſub ſinu complementi & ſub ſinu verſo, ad rectangulum ſub ſinu toto, & ſub aggregato ſinus totius & ſinus complementi.

In ſchemate ſuperiori. Dico eſſe vt EF. ad BG. ita rectan- Coroll. 2.
gulum DEF. ad rectangulum DBE. Cum enim ſit vt EF. ad 22.3. huius.
FG. ita EA. ad AG. id eſt ED. ad DA. ſeu ED. ad DB. erit 8. 6.
vt EF. ad FG. ita ED. ad DB. & cum ſit vt BG. ad GF. ita Coroll. 2.
BE. ad EF. erit ratio compoſita ex EF. ad FG. & FG. ad BG. 25.3. huius.

EF.	FG.	DE.	BD.
FG.	BG.	EF.	EB.

eadem. quæ compoſitæ DE.
ad BD. & EF. ad EB. Igi- 3.3. huius.
tur ex 3. 3. huius vt EF. ad BG. ita rectangulum DEF. ad rectangulum EBD. Quod demonſtrare oportuit.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

QVadrata ſinus totius, chordæ arcus quadrante maioris, & chordæ arcus qui prioris ſit complementum ad duos rectos ordine coniuncto habent eam rationem quam tria rectangula, primum ſub ſecante & ſinu toto; ſecundum ſub diametro & ſecante cum ſinu toto;

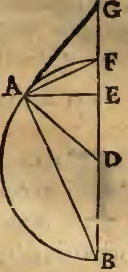
ter-

tertium ſub differentia ſecantis & diametro. Ac tam quadrata quam rectangula ordine, ac coniunctim ſe habent vt ſinus totus; duplum compoſiti ex ſinu complementi & ſinu toto; & duplum ſinus verſi minoris arcus: aut etiam ordine hæc terna rationem habent quam ſecans, duplum ſecantis cum ſinu toto, & duplum differentiæ ſecantis.

Repetantur figuræ præcedentes cum ἐκθέσει prop. 22. huius. Dico quadrata rectarum BD. BA. AF. eam habere ordine rationem, quam habent tria rectangula GDF. GBF. GFB. Item quam tres rectæ DF. duplum BE. duplum FE. Item quam tres rectæ DG. duplum BG. & duplum FG. Quoniam tria trectangula ſub FB. FD; & ſub FB. & dupla BE; & ſub FB. & dupla FE; ha bent eandem ba-
1. 6. ſim FB. erunt ordine vt altitudines FD. duplum BE. & duplum FE. ſed rectanguli ſub FB. FD. dimidium eſt quadratum FD; & rectanguli ſub FB. ac duplo BE. dimidium eſt rectangulum FBE. ac denique rectanguli ſub duplo FE. & FB. dimidium eſt rectangulum BFE. quæ omnia
15. 5. ſe habent vt ſua dupla; ergo quadratum FD. rectangulum FBE. & rectangulum BFE. inter ſe ſunt ordine, vt tres rectæ FD; duplum BE. & duplum FE. Rectangulo autem FBE. eſt æquale quadratum AB. & rectangulo BFE. quadratum AF. (nam cum in trianguli rectanguli BAF. baſim BF. ex angulo
8. & 4. 6. recto A. demiſſa ſit perpendicularis AE. erit vt FB. ad BA.
17. 6. ita BA. ad BE. ideoque quadratum AB. æquale rectangulo FBE. & vt BF. ad FA. ita FA. ad FE. ideoque quadratum FA. æquale rectangulo BFE.) Igitur quadrata FD; BA; AF; inter ſe ordine ſunt, vt tres rectæ FD. dupla BE. & dupla FE.

Coroll. 2. 22. 3. huius. Rurſus cum oſtenſum ſit ſuperius eſſe vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. id eſt GD. ad DA. ſeu GD. ad DF. erit vt GF. ad FE. ita GD. ad DF. & conuertendo, vt FE. ad FG. ita DF.
8. 6. ad DG. Item cum ſit vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. id eſt

AD.



*A**D*. ad *DE*. ſeu *BD*. ad *DE*. erit componendo vt G*E*.ad *EF*.ita *BE*. ad *ED*.& permutando,ac componendo, vt G*B*. ad *BE*. ita F*D*. ad *DE*. id eſt A*D*. ad *DE*. id eſt GA. ad A*E*.id eſt GF.ad F*E*. Quare vt GF. ad F*E*. ita G*B*. ad *BE*. & conuertendo vt F*E*. ad G*F*. ita *BE*. ad G*B*. ſed etiam paulo ante oſtenſum eſt eſſe vt F*E*. ad GF. ita *D*F. ad *D*G. erit igitur vt *D*F. ad *D*G. ita *BE*. ad G*B*. & F*E*. ad GF. & permutando, vt *D*F. ad *BE*. ita *D*G. ad G*B*. eſt autem vt *BE*. ad F*E*. ita G*B*. ad GF. ideoque vt *D*F. ad duplum *BE*. ita *D*G. ad duplum *B*G. & vt duplum *BE*. ad duplum F*E*. ita duplum *B*G. ad duplum FG. 8. 6. Coroll. 2. 25.3. huius.

DF.	*D*uplum *BE*.	*D*uplum *FE*.
DG.	*D*uplum *BG*.	*D*uplum *FG*.

Cum igitur quadrata *DF*. *BA*. *FA*. ordine ſe habeant vt *DF*; duplum *BE*; & duplum *FE*; & vt tres illæ rectæ ita ordine ſint *DG*. duplum *BG*. duplum *FG*. habebunt quadrata *DF*. BA. *F*A. eam ordine rationem quam tres rectæ *DG*. duplum *BG*. & duplum *FG*.

*D*enique tria rectangula ſub *GD*. *FB*; & ſub duplo *GB*. & *FB*; & ſub duplo FG. & F*B*; cum habeant eandem baſim F*B*. erunt ordine ac coniunctim vt tres altitudines *GD*; duplum *GB*; duplum *FG*. Sumpto autem in vno quoque rectangulo dimidio vnius lateris, erit rectangulum ſub GD. & FD. dimidio ipſius FB. & rectangulum ſub GB. FB. medietas prioris rectanguli ſub duplo GB. & FB. & rectangulum ſub FG. FB. medietas rectanguli ſub duplo FG. & FB. Eruntigitur rectangula GDF. GBF. GFB. vnumquodque in ratione rectanguli dupli; ſed rectangula dupla oſtenſa ſunt eſſe in ratione rectarum DG. dupli GB. dupli FG. Igitur rectangula GB*F*. GD*F*. G*F*B. ſunt ordine vt DG. duplum BG. Duplum *F*G. ſed eandem ordine ac coniunctim ratione habent 1. 6. 15. 5.

ex BD. GH. æquales; eſt autem DG. ſecans, igitur duæ BD. GH. ſecanti ſunt æquales; tota igitur BH. ex duabus ſecantibus conſtat, ideoque ſecantis DG. dupla eſt.

Rurſus conſtat rectangulum BG*F*. quadrato GA. eſſe æquale; item rectangulum B*F*E. quadrato A*F*. & rectangulum BE*F*. quadrato AE. (Nam ob ſimilitudinem triangulorum B*F*A. A*F*A. item BEA. AE*F*. eſt vt B*F*. ad *F*A. ita *F*A. ad *F*E. Item vt BE. ad EA. ita EA. ad E*F*. ideoque tam rectangulum B*F*E. quadrato *F*A. quam rectangulum BE*F*. Quadrato AE. eſt æquale.) 36. 3. 8. 6. 4. 6. 17. 6.

Rectangula autem BG*F*. B*F*E. habent rationem compoſitam ex ratione GB. ad B*F*. & G*F*. ad *F*E. vt vero G*F*. ad *F*E. ita GA. ad AE. (ob angulum GAE. bifariam ſectum recta A*F*.) & vt GA. ad AE. ita AD. ad DE. id eſt *F*D. ad DE. & vt *F*D. ad DE. (ſumpto terminorum duplo) ita duplum *F*D. ad duplum DE. id eſt *F*B. ad duplum DE. Igitur a primo ad vltimum, vt G*F*. ad *F*E. ita FB. ad duplum DE. Quare cum ratio BG*F*. B*F*E. ſit compoſita ex rationibus GB. ad BF. & BF. ad duplam DE. erit vt rectangulum B*GF*. ad rectangulum BFE. id eſt quadratum *GA*. ad quadratum FA. ita GB. ad duplam DE. 23. 6. 3. 6. Coroll. 2. 22. huius. 8. & 4. 6. 15. 5.

Inſuper rectangula B*F*E. BE*F*. poſita communi altitudine E*F*. inter ſe ſunt vt baſes *F*B. EB. vt igitur FB. ad BE. ita rectangulum B*F*E. ad rectangulum BE*F*. Quoniam vero eſt vt BE. ad E*F*. ita BG. ad G*F*. id eſt *BG*. ad *GH*. erit conuertendo, & componendo, vt *FB*. ad BE. ita HB. ad B*G*. ſed vt *FB*. ad BE. ita modo probatum eſt eſſe rectangulum B*FE*. ad rectangulum B*EF*. igitur rectangulum B*F*E. ad rectangulum B*EF*. id eſt Quadratum *F*A. ad quadratum EA. rationem habet quam HB. nimirum duplum ſecantis ad B*G*. compoſitam ex ſinu toto, & ſecante. Coroll. 2. præcedentis prop.

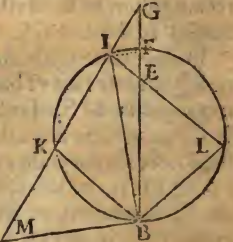
Cum igitur ſit vt *GA*. quadratum, ad quadratum *F*A. ita *G*B. ad duplum D*E*. vt probauimus in prima parte huius; & vt quadratum FA. ad quadratum *E*A. ita HB. ad B*G*. Conſtat quod primo proponebatur. Et ex æqualitate erit vt BH.

dupla ſecantis ad DE. duplam ſinus complementi, ita Quadratum *GA*. ad quadratum EA. & priorum terminorum dimidia, vt ſecans D*G*. ad ſinum complementi D*E*. ita quadratum *GA*. ad quadratum EA. Quod erat propoſitum.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

SI in triangulo rectangulo ex puncto vbi duo latera angulum rectum efficiunt, duæ rectæ circa alterutrum laterum ducantur, quarum altera extra, altera intra triangulum baſim ſecet, efficientes cum dicto latere angulos æquales: erit vt compoſita ex baſi & ſegmento exteriori, ad ſegmentum exterius, ita ſegmentorum interiorum remotius ab exteriori, ad vicinius.

SIT triangulum rectangulum BI*F*. cuius baſis B*F*. latera circa angulum rectum I. ſint IF. I*B*. ex puncto I. in baſim ducantur duæ rectæ I*E*. intra triangulum I*G*. extra, facientes angulos *E*IF. *F*I*G*. æquales & ſecantes baſim productam in tria ſegmenta, externum *GF*. interna BE. remotius ab externo, & EF. vicinius, ac contiguum. Dico eſſe vt B*G*. ad *G*F. ita *B*E. ad *E*F. Diametro BF.



Schol. in 31. 3. circa angulum rectum FIB. deſcribatur circulus FI*B*. cadatque angulus rectus ſupra punctum contactus lineæ ductæ à puncto *G*. in circulum, & producantur *G*I. IE. quæ primo circulum ſecent in punctis KL. ac connectantur KB. *B*L. fiatque angulus K*B*M. (producta *G*K. in M.) æqualis angulo KB*G*.

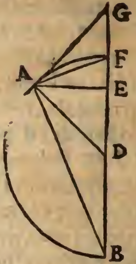
36. 3. 14. 6. Quoniam æqualia ſunt rectangula *BGF*. K*G*I. erit circa angulum *G*. vt *BG*. ad *G*I. ita K*G*. ad *G*F. & permutando vt *BG*.

ad

ad KG. ita GI. ad GF. æquiangula igitur ſunt triangula GIF. 6. 3.
GBK. & æquales anguli GIF. GBK. & GFI. GKB. Item cum in triangulis IEF. EBL. æquales ſint anguli ad E. verticem, & 15. 1.
duo FIE. EBL. eidem arcui FL. inſiſtentes, æquiangula ſunt 27. 3.
tota triangula, ſed angulo FIE. æqualis ponitur FIG. & ipſi 32. 1.
FIG. oſtenſus eſt æqualis KBG. æquales igitur ſunt anguli KBG. LBE. ſed angulo KBG. factus eſt æqualis KBM. Igitur KBM. æqualis eſt tam angulo LBE. quam GIF. & FIE. atque ideo totus MBG. toti GIF. æqualis eſt, communis autem eſt angulus ad G. æqualis igitur eſt reliquus IEF id eſt BEL. 32. 1.
reliquo BMK. Cum igitur duo triangula KBM. LBE. habeant 15. 1.
duos angulos KBM. BMK. æquales duobus LBE. BEL. & latera KB. BL. æqualia (cum enim æquales ſint anguli KBG. LBE. æquales erunt arcus FK. FL. ideoque & 26. 3. 2. pron.
complementa ad duos rectos KB. LB. ac propterea etiam earum chordæ KB. LB. æquales) æquilatera erunt triangula 29. 3.
KBM. BLE. & latus KM. æquale erit ipſi EL. & EB. ipſi BM. 26. 1.
Igitur cum angulus GIE. ſit diuiſus bifariam recta IF. ex hypotheſi erit vt GF. ad FE. ita GI. ad IE. & vt GI. ad IE. ita 3. 6.
GB. ad BM. ſimilia enim oſtenſa ſunt triangula GIF. GBM. & vt GB ad BM. ita GK. ad KM. æquales enim poſiti ſunt 3. 6.
anguli KBG. KBM. ipſi autem KM. æqualis oſtenſa eſt EL. erit igitur vt GF. ad FE. ita GK. ad EL. Rurſus cum ſit vt 3. 6.
GI. ad IE. ita GF. ad FE. erit permutando vt GI. ad GF. id eſt vt BG. ad GK. ita IE. ad FE. id eſt BE. ad EL. & permutando 4. 6.
vt BG. ad BE. ita GK. ad EL. Cum igitur oſtenſum ſit paulo ante eſſe GF. ad FE. vt GK. ad EL. & nunc eſſe vt GK. ad EL. ita BG. ad BE. erit vt FG. ad FE. ita BG. ad BE. 15. 5.
& permutando, ac conuertendo, vt BG. ad GF. ita BE. ad EF. Quod propoſitum erat demonſtrare.

Quod ſi recta ducta ex G. circulum non ſecet, ſed tangat in puncto A. ſitque triangulum rectangulum BAF. cum cuius latere AF. faciant duæ AG. AE. angulos æquales GAF. FAE. Dico rurſus vt BG. ad GF. ita eſſe BE. ad EF. Ducta enim ex centro circuli D. recta ad punctum contactus DA.

faciet



18. 3. faciet angulum rectum DAG. re-
31. 3. ctus autem eſt & BAF. quare ſi cō-
munis auferatur angulus FAD. re-
manebunt æquales GAF. DAB.
ſed ipſi GAF. ponitur æqualis
FAE. & ipſi DAB. æqualis eſt
5. 1. DBA. æqualis igitur eſt totus
GAE. duobus DAB. DBA. id eſt
32. 1. angulo GDA. Cum igitur duo
triangula GAD. GAE. habeant
angulum communem ad G. & an-
gulus GAE. æqualis ſit angulo ADE. etiam reliqui GEA.
GAD. æquales erunt, rectus autem eſt GAD. igitur rectus
eſt & GEA. Quare ex 2. Coroll. 25. huius erit vt BG. ad GF.
ita BE. ad EF.

Denique cadat angulus rectus ſub punctum contactus, vt
in K. & ſit triangulum rectangulum BKF. cum cuius latere
KF. duæ rectæ KG. KE. faciant angulos æquales GKF. FKE.
ſecentque dictæ lineæ circuli peri-
pheriam in punctis I. N. & conne-
ctantur rectæ FN. FI. ac ducatur
IE. ſecans peripheriam in L. rur-
ſumque connectantur KB. BL. Di-
co rurſus eſſe vt GB. ad BE. ita GF.
ad FE. Quoniam æquales ſunt an-
26. 3. guli GKF. FKE. æquales ſunt &
29. 3. arcus IF. FN. æquales igitur rectæ
27. 3. IF. FN. & anguli IFE. NFE. Qua-
re cum duo triangula EFI. EFN. habeant duo latera EF. FI.
duobus EF. FN. æqualia & angulos EFI. EFN. dictis lateri-
4. 1. bus contentos ęquales & baſim IE. baſi EN. æqualem ha-
bebunt, & angulum IEF. angulo NEF. Rurſus cum in trian-
27. 3. gulis KIE. LNE. angulus KIE. angulo LNE. vtpote eidem
arcui KL. inſiſtens æqualis ſit, & angulus IKE. angulo
NLE. itidem eidem arcui IN. inſiſtens æqualis, & æqualia



latera

latera IE. EN. æqualia erunt & latera EK. EL. Quare cum 26. 6.
in triangulis EKB. ELB. anguli KEB. LEB. æquales ſint
(ſunt enim æquales angulis ad verticem NEF. IEF. qui modo
oſtenſi ſunt æquales) & circa eos latera BE. EK. lateribus
BE. EL. æqualia erunt anguli KBE. LBE. æquales: angulo au- 4. 1.
tem KBE. ſeu KBG. eſt æqualis angulus GIF. vt prima parte
huius propoſitionis probatum eſt, & angulo LBE. angulus
FIE. æquales igitur ſunt anguli GIF. FIE. ſed rectus eſt FIB. 31. 3.
in ſemicirculo. Igitur per primam partem huius propoſitionis vt BG. ad GF. ita BE. ad EF. & permutando vt GB. ad BE.
ita GF. ad FE. Quod propoſitum fuerat demonſtrare.

COROLLARIVM. I.

*Ex dictis manifeſtum eſt, ſi anguli GIF. FIE. ponantur
æquales, angulos LBE. KBG. & arcus BL. BK. & LF.
KF. etiam eſſe æquales, & ſi arcus KF. LF. & BL. BK. aut angu-
li LBE. KBG. ponantur æquales, ſequi angulos GIF. FIE.
eſſe æquales. Hoc enim in progreſſu primæ partis demonſtratio-
nis probatum eſt, nam ſemper angulus LBE. angulo FIE. & an-
gulus KBG. angulo IFG. eſt æqualis: poſitis autem angulis LBE.
KBG. æqualibus, æquales ſunt arcus inſiſtentes KF. LF. & eorum* 26. 3.
complementa KB. LB.

COROLLARIVM. II.

*Conſtat præterea ſi anguli GKF. FKE. ponantur æquales,
etiam arcus IF. FN. item arcus BL. BK. & eorum comple-
menta LF. KF. eſſe æqualia. Quod vltima parte huius proba-
tum eſt.*

COROLLARIVM. III.

*Denique ſi in triangulo rectangulo GAD. ex angulo recto
GAD. in baſim recta demittatur faciens angulum GAE.
æqualem angulo ADG. rectam AE. eſſe perpendicularem ad ba-*

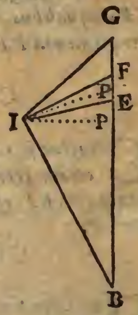
ſim

ſim GD. hoc enim ſecunda parte huius probatum eſt, eſtque vna ex conuertentibus octaua ſexti elementorum.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXI.

SI in triangulo rectangulo ex puncto vbi duo latera angulum rectum efficiunt, duæ rectæ circa alterutrum laterum ducantur, quarum altera extra, altera intra triangulum baſim ſecet, ſitque vt compoſita ex baſi & ſegmento exteriori ad ſigmentum exterius, ita ſegmentorum interiorum remotius ab exteriori ad vicinius, efficient duæ illæ rectę cum latere trianguli circa quod ductæ ſunt angulos æquales.

SINT eadem quæ priori propoſitione, nimirum ſit triangulum rectangulum BIF. cuius baſis BF. latera circa angulum rectum I. ſint IF. I*B*. & ex puncto I. in baſim duæ rectæ ducantur I*E*. intra triangulum IG. extra, facientes angulos *E*IF. *F*IG. & ſecantes baſim productam in tria ſegmeuta externum G*F*. interna vero BE. remotins ab externo, & *E*F. vicinius ac continguum, ſitque vt BG. ad GF. ita B*E*. ad *E*F. Dico angulos *G*IF. *G*IE. eſſe æquales. Si enim non ſint æquales, ſit primum *G*IF. maior quam FI*E*. & fiat FIP. æqualis ipſi *G*IF. cadatque punctum P. ſupra *E*. Quoniam rectus eſt angulus FI*B*. & æquales anguli *G*I*F*. FI*B*. erit per præcedentem vt *BG*. ad



15. 5. *GF*. ita *B*P. ad P*F*. ſed etiam ex hypotheſi eſt vt *BG*. ad *G*F. ita *BE*. ad *EF*. vt igitur *BE*. ad *EF*. ita *B*P. ad PF. & componendo vt *BF*. ad F*E*. ita

8. 5. *BF*. ad *F*P. æquales igitur ſunt *EF*. P*F*. pars & totum: Quod eſt

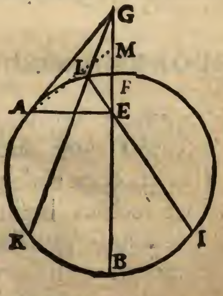
eſt abſurdum. Idem ſequetur ſi angulus *GIF.* ponatur minor angulo *FIE.* & punctum P. cadat infra *E.*

Neque aliter procedit demonſtratio in alijs caſibus, vt inducenti manifeſtiſſimum eſt. Igitur ſi in triangulo ex puncto &c. Quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXII.

SI ex duobus punctis circumferentiæ circuli æqualiter a diametro remotis duæ rectæ ducantur quarum prior diametrum intra circulum, & peripheriam ſecet; poſterior per punctum vbi prior peripheriam ſecat tranſiens in diametrum extra circulum incidat, ac ex puncto interno diametri ad diametrum perpendicularis ducatur peripheriam ſecans in puncto; recta ex hoc puncto ad punctum externum diametri ducta circulum tangit.

SIT circulus FAB. cuius diameter BF. a cuius puncto B. æqualiter remota ſint I. K. in peripheria circuli, id eſt arcus BI. arcui BK. ſit æqualis & ducta IL. ſecet diametrum intra circulum in E. & peripheriam in L. & ducatur per punctũ L. recta KL. quæ producta ſecet diametrũ productam in G. deniqueex E. ad diametrum BF. ducatur perpendicularis



EA. circuli peripheriam ſecans in A. & connectatur AG.

Dico quod recta AG. circulum tangit in A. ſi enim AG. non ſit tangens, ſit quæpiam alia vt AM. Cum arcus KB. BI. ſint æquales, conſtat ex 30. 3. huius Coroll. 1. & 2. ſi duca-
Coroll. 2. tur LF. LB. angulo BLF. exiſtente recto angulos ELF.
25. huius. FLG. eſſe æquales. Igitur ex 25. huius vt BG. ad GF. ita BE. ad EF. Rurſus cum tangens ſit, ex hypotheſi, recta MA.
15. 5. & AE. ſinus rectus arcus AF. patet ex Corol. 2. 25. huius eſſe vt BM. ad MF. ita BE. ad EF. Igitur vt BG. ad GF. ita BM.
9. 5. ad MF. & diuidendo vt BF. ad FG. ita BF. ad FM. æquales igitur ſunt GF. MF. pars & totum. Quod eſt abſurdum. Igitur ſi ex duobus punctis &c. Quod oportebat demonſtrare.

SCHOLIVM.

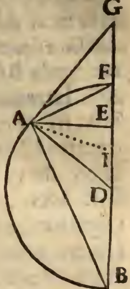
Hinc patet ratio facilis ducendi tangentem circuli ex dato puncto extra circulum, vt ex puncto G. Ducatur primum diameter GB. hinc recta GLK. vtcumque ſecans circulum in L. K. & auferens arcum KB. cui ſumatur æqualis BI. & ex I. ducatur IL. ſecans diametrum in E. perpendicularis EA. ad diametrum ſecabit circulum in A. puncto contactus, vt ex demonſtratis in ipſo textu aperte conſtat.

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIII.

SI ex puncto vbi duo latera trianguli angulum rectum faciunt ducta recta baſim bifariam diuidat, & ex eodem puncto perpendicularis ad dictam rectam, baſim extra triangulum ſecet, atque à ſectionis puncto perpendiculari æqualis in baſi ſumatur verſus triangulum datum, ea baſim trianguli in ratione laterum diuidet.

SIT

SIT triangulum BAF. rectangulum ad A. vnde demittatur AD. baſim BF. bifariam ſecans in D. & ex A. ad AD. perpendicularis ducatur AG. ſecans baſim productam in G. ac ipſi AG. æqualis ſumatur GI. Dico eſſe vt BA. ad AF. ita BI. ad IF. Centro D. diſtantia DB. vel DF. deſcribatur circulus qui tranſibit per A. & ducatur ex A. recta EA. perpendicularis ad BF. & connectatur IA. Quoniam angulo DAB. æqualis eſt DBA. & angulo DBA. æqualis FAE. ob perpendicularem AE. in baſim trianguli rectanguli cadentem, æquales erunt anguli DAB. FAE. At quia rectæ GA. æqualis accepta eſt GI. ducta AI. angulum DAE. bifariam diuidet, vt propoſitione 40. primi huius demonſtrauimus. Ergo ſi æqualibus BAD. FAE. æquales addantur EAI. DAI. erunt anguli BAI. FAI. æquales. Igitur vt BA. ad AF. ita BI. ad IF. Quod erat demonſtrandum.



Schol. 31. 3.

8. 6.

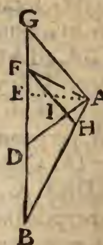
40. 1. huius.

3. 6.

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXIV.

SI ad datam rectam infinitam à dato puncto quod in ea non ſit quatuor rectæ ducantur, quarum prima & tertia, item ſecunda & quarta ad datum punctum angulum rectum efficiant, & cum partibus datæ quas intercipiunt triangula rectangula; à puncto autem vbi tertia baſim ſecat quartæ parallela ducatur primæ occurrens: erit vt tota parallela ad ſegmentum inter baſim & ſecundam, ita rectangulum ſub vtraque baſium, ad rectangulum ſub ſegmento medio, & ſegmento inter extremas comprehenſum.

Datum ſit punctum A. à quo in datam infinitam BG. ducantur quatuor rectæ AB. AD. AF. AG. efficiantque AB. AF. item AD. AG. angulos rectos BAF. DAG. ad punctum A. ita vt ſint rectangula triangula BAF. DAG. quorum baſes BF. DG. latera exteriora AB. AG. interiora DA. AF. & ex puncto F. parallela ipſi GA. ducatur FI. ſecans AB. in I. & AD. in H. Dico eſſe vt IF. ad FH. ita rectangulum BG. DG. ad rectangulum BG. DF.



Quoniam angulus DAG. poſitione rectus
29. 1. eſt, erit etiam FHA. rectus, ſed rectus
8. 6. etiam eſt poſitione IAF. æquiangula igitur
4. 6. ſunt triangula IFA. AFH. eſtque vt IF. ad FA. ita AF. ad
17. 6. FI. ideoque æquale eſt quadratum AF. rectangulo IFH.
Rurſus quia ſimilia ſunt triangula GBA. FBI. (ob angu-
29. 1. lum communem ad B. & externos BFI. BIF. æquales
4. 6. internis BGA. BAG.) erit vt GA. ad FI. ita GB. ad
BF. & conuertendo vt FI. ad GA. ita BF. ad GB. & ob eandem cauſam in triangulis æquiangulis DAG. DHF. eſt vt GA ad FH. ita GD. ad DF. Cum ergo ſit vt FI. ad GA. ita BF. ad GB. & vt GA. ad FH. ita GD. ad DF. erit

3. 3. huius.

FI.	GA.	FH.	
BF.	GB.	GD.	DF.

ex 3. 3. huius vt FI. ad FH. ita rectangulum BF. GD. ad rectangulum GB. DF. Quod propoſitum erat demonſtrare.

COROLLARIVM. I.

Hinc etiam efficitur eſſe vt rectangulum BGD. ad rectangulum BFD. ita Quadratum GA. ad quadratum FA. cum enim ex demonſtratis in propoſitione ſit vt GA. ad FI. ita GB. ad BF. & vt GA. ad FH. ita GD. ad DF. erit proportio compoſita ex GA. ad FI. & ex GA. ad FH. eadem quæ compoſita ex GB. ad BF. & GD. ad DF. ſed ratio compoſita ex GA.

ad

ad FI.& GA.ad FH.eſt eadem quæ quadrati GA. ad rectangulum IFH. id eſt ad quadratum FA. (quod rectangulo IFH. in propoſitione demonſtratum eſt æquale) compoſita vero ex ratione GB. ad BF. & ex GD. ad DF. eſt eadem quæ rectanguli BGD. ad rectangulum BFD. vt ergo rectangulum BGD. ad rectangulum BFD. ita quadratum GA. ad quadratum FA. 23. 6. 23. 6.

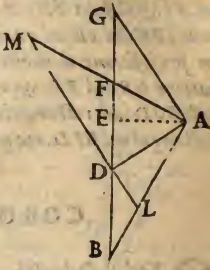
COROLLARIVM. II.

QVod ſi DA. DF. fuerint æquales, & deſcendat in BG. perpendicularis AE. erit vt FB. ad BE. ita rectangulum BF. GD. ad rectangulum GB. DF. Nam quia æquales ſunt DA. DF. æquales erunt anguli EFA. HAF. recti autem ſunt & anguli ad EH. igitur ſimilia ſunt triangula FEA. id eſt AEB. & AHF. id eſt IHA. Vt igitur IH. ad HA. ita FE. ad EA. & vt AH. ad HF. ita AE. ad EB. ergo ex æqualitate, & componendo, vt IF. ad FH. ita FB. ad BE. ſed vt IF. ad FH. ita rectangulum BF. DG. ad rectangulum BG. DF. vt in propoſitione probatum eſt: vt igitur FB. ad BE. ita rectangulum BF. DG. ad rectangulum BG. DF. 5. 1. 8. 6. 4. 6.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

FAciant rurſus rectæ AB AF. & rectæ DA. AG. in datam BG. cadentes ex dato puncto A. angulos rectos BAF. DAG. & ex puncto D. vbi ſecunda baſim ſecat quartæ parallela ducatur L. M. ſecans primam AB. in L. & tertiam AF. in M. Dico eſſe vt LD. ad DM. ita rectangnlum BD. GF. ad rectangulum BG. FD.

NAM quia ob parallelas LD. AG. ſimilia ſunt triangula BLD. BAG. erit vt LD. ad AG. ita BD. ad BG. Rurſus



ſus quia ob parallelas AG. DM. ſimilia ſunt triangula DFM. GFA. erit vt AG. ad DM. ita GF. ad FD. cum igitur ſit vt LD. ad AG. ita BD. ad BG. & vt AG.
3.3.huius. ad DM. ita GF. ad FD. erit ex 3.

LD.	AG.	DM.	
BD.	BG.	GF.	FD.

3. huius vt LD. ad DM. ita rectangulum BD.GF. ad rectangulum BG. FD. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM. I.

Hinc facile deducitur eſſe vt quadratum GA. ad quadratum DA. ita rectangulum BGF. ad rectangulum BDF. nam cum oſtenſum ſit eſſe vt LD. ad AG. ita BD. ad BG. erit conuertendo vt AG. ad LD. ita BG. ad BD. ſed eſt etiam vt AG. ad DM. ita GF. ad FD. erit ergo proportio compoſita ex AG. ad LD. & AG. ad DM. eadem quæ compoſita ex BG. ad BD. & ex GF. ad FD. ſed ratio compoſita ex AG. ad LD. &
23. 6. *AG. ad DM. eſt ratio quadrati AG. ad rectangulum LDM.*
23. 5. *& ratio compoſita ex BG. ad BD. & ex GF. ad FD. eſt ratio rectanguli BGF. ad rectangalum BDF. igitur vt quadratum AG. ad rectangulum LDM. ita rectangulum BGF. ad rectangulum BDF. ſed rectangulo LDM. eſt æquale quadratum AD. (Nam cum parallelæ ſint DM. AG. & rectus ſit angulus DAG. ex hypotheſi rectus erit MDA. ſed etiam poſitione rectus eſt*
8. 6. *LAM. Igitur ſimilia ſunt triangula LDA. DAM. & vt LD.*
4. 6.
17. 6. *ad DA. ita DA. ad DM. quare rectangulum LDM. quadrato AD. æquale eſt) vt ergo quadratum AG. ad quadratum AD. ita rectangulum BGF. ad rectangulum BDF.*

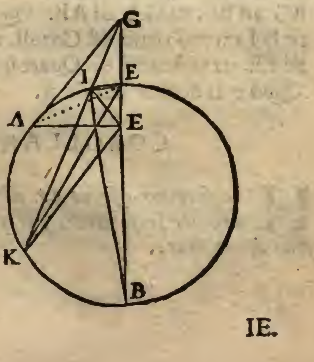
COROL-

COROLLARIVM. II.

QVod ſi DA.DF. fuerint æquales, & deſcendat ex A. in GB. perpendicularis AE. Erit vt FE. ad EB. ita rectangulum BD. FG. ad rectangulum BG. DF. Nam cum æquales ſint DA.DF. æquales erunt anguli DAF.DFA. Quare cum in triãgulis rectangulis AEF.ADM. æquales etiam ſint anguli DAM.EFA. ſimilia erunt triãgula FEA. id eſt AEB. & triã-
gula ADM. id eſt LDA. Igitur vt LD. ad DA. ita FE. ad EA. & 8. 6.
vt DA. ad DM. ita EA. ad EB. ergo ex æquali, vt LD. ad DM. ita 4. 6.
FE. ad EB. ſed vt LD. ad DM. ita oſtenſum eſt rectangulum BD. FG. ad rectangulum BG. DF. igitur vt FE. ad EB. ita rectangulum BD. FG. ad rectangulum BG. FG.

THEOREMA XXXVI. PROPOS. XXXVI.

SI ex punctis diametri, ex quibus ad circumferentiam tangens, ac ſinus rectus eiuſdem arcus ducuntur, duæ aliæ rectæ peripheriam vbilibet in eodem puncto ſecent: habebit ea quæ ex puncto tangentis, ad eam quæ ex puncto ſinus recti ducitur eandem rationem, quam tangens ad ſinum rectum.



SIT circulus FAB. cuius diameter BF. arcus quilibet AF. cuius tangens AG. ſecans diametrũ productam in G. & ſinus rectus AE. ſecãs diametrũ in E. ſumatur quodlibet punctum I. in peripheria, & ducatur GI. EI. Dico eſſe vt GA. ad AE. ita GI. ad

IE. cadat primo punctum I. inter A. & F. & connectatur
31. 3. Coroll. 2. IF. Conſtat primo angulum FIB. in ſemicirculo rectum
25..huius. eſſe, Deinde manifeſtum eſt ex Corollario 2. 25. huius eſſe vt BE. ad EF. ita BG. ad GF. & permutando ac conuertendo, vt BG. ad BE. ita GF. ad EF. Igitur, ex propoſit. 31.
31.3.huius. 3. 6. huius, erit angulus GIF. æqualis angulo FIE. Ergo vt GI.
Coroll. 2. ad IE. ita GF. ad FE. ſed etiam ex Coroll. 2. 22. huius
22. huius. 11. 5. eſt vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. Igitur vt GI. ad IE. ita eſt GA. ad AE. Quod primo propoſitum erat.

Sed punctum aſſumptum in peripheria non ſit inter F. & A. ſed cadat inter A. & B. vt in K. & ducantur KE. KG. Itemque connectatur KF. Eodem modo quo prius, oſtendemus cum angulus FKB. in ſemicirculo ſit rectus, & ſit vt GB. ad BE. ita GF. ad FE. angulum GKE. bifariam diuidi recta KF. erit igitur vt prius, vt GK. ad KE. ita GF. ad FE. & vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. ac proinde vt GK. ad KE. ita GA. ad AE.

Cadat denique punctum aſſumptum in punctum, vbi diameter circululum ſecat, ac primum quidem in B. ac du-
Coroll. 2. cantur BG. BE. Dico eſſe vt BG. ad BE. ita GA. ad AE. Eſt
25.3.huius. enim ex Corollario 2. 25. huius vt BG. ad GF. ita BF. ad GF. & permutando vt BG. ad BE. ita GF. ad FE. ſed vt
Coroll. 2. 22.3.huius. FE. ad FE. ita GA. ad AE. ex Coroll. 2. 22. 3. huius. Igitur vt BG. ad BE. ita GA. ad AE. Quod ſi punctum aſſumptum ſit B. Iam probatum eſt Coroll. 2. 22. 3. huius eſſe vt GF. ad FE. ita GA. ad AE. Quare ſi ex punctis diametri &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM. I.

11. 5. *Hinc ſequitur eſſe vt EI. ad IG. ita EK. ad KG. nam duæ illæ proportiones, proportioni EA. da AG. eadem ſunt demonſtratæ.*

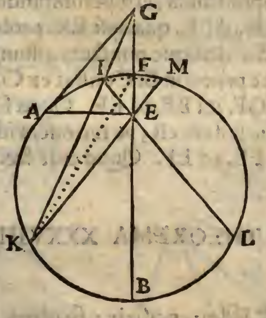
COROLLARIVM. II.

Conſtat etiam angulos EIG. EKG. à rectis IF. KF. biſariam diuidi.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XXXVII.

SI ex quolibet puncto peripheriæ ad puncta diametri in qua incidunt tangens ac ſinus dati arcus, duæ rectæ ducantur circuli peripheriam in duobus punctis ſecantes; interceptæ inter puncta aſſumpta in peripheria & diametro, ad interceptas inter punctum diametri, & punctum ſectionis in peripheria ſunt in eadem ratione.

SIT circulus FAB. in quo arcus AF. cuius tangens GA. ſinus rectus AE. incidentes in diametrum BF. productam; ſumatur quodlibet punctum K. in peripheria, ex quo ad puncta G. E. ducantur rectæ KG. KEM. ſecantes, peripheriam illa in I. hæc in M. Erit KG. intercepta inter punctum aſſumptum K. & punctũ G. in diametro; IG. vero intercepta inter punctum ſectionis I. & punctum G. in diametro, recta vero KE. erit intercepta inter



punctum aſſumptum K. & punctum E. in diametro, & EM. inter M. punctum ſectionis, & punctum E. Dico eſſe vt KG. ad GI. ita KE. ad EM.

Cadat primo punctum aſſumptum inter puncta A. B. in

36.3.huius. Coroll. 2. K. & iungantur IF. FM. EI. Quoniam æquales ſunt anguli GKF. FKE. æquales erunt & arcus IF. FM. quibus inſiſtũt,
29. 3. æquales igitur & chordæ IF. FM. & æqualia complementa
26. 3. IB. MB. arcuum IF. FM. quare æquales quoque IFE. EFM. illis inſiſtentes cum igitur duo triãgula IFE. MFE. habeant circa angulos æquales IFE. EFM. duo latera EF. FI. duobus EF. FM. æqualia, erunt & baſes IE. EM. æquales. Inſu-
4. 1. per cum ſit vt GK. ad KE. ita GI. ad IE. ex Coroll. 2. præ-
Coroll. 2. 36. huius. cedentis, erit permutando vt GK. ad GI. ita KE. ad IE. id eſt ad EM. quæ ipſi IE. oſtenſa eſt æqualis.

Sit ſecundo punctum aſſumptum inter puncta AF. videlicet in I. & ducantur GIK. IEL. Dico rurſus eſſe vt IG. ad GK. ita IE. ad EL. Nam cum æquales ſint anguli ad verti-
27. 3. cem E. in triangulis IEK. MEL. & anguli KIE. LME. eidem arcui KL. item anguli MLE, IKE. eidem arcui IM. inſiſtentes; itemque æqualia latera IE. EM. vt modo proba-
26. 1. tum eſt; æqualia erunt & latera KE. EL. Iam vero cum ſit
Coroll. 1. vt IG. ad IE. ita GK. ad EK. ex Corollario 1. præcedentis
36. huius. propoſitionis, erit permutando vt IG. ad GK. ita IE. ad EK. id eſt ad EL. quæ ipſi EK. probata eſt æqualis.

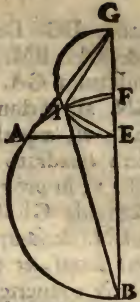
Sit denique punctum aſſumptum in diametro, vt in B. vel
Coroll. 2. F. ac primo in B. Conſtat ex Coroll. 2. 25. huius eſſe vt BG.
25.3.huius. ad GF. ita BE. ad EF. Quod ſi punctum aſſumptum ſit in F. manifeſtum eſt, pe rationem identitatis eſſe vt FG. ad GF. ita FE. ad EF. Quod erat &c.

THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XXXVIII.

Iſdem poſitis: ſi circa EG. circulus deſcribatur ſecans circulum FAB. in I. & ducantur IG. IF. IE. IB. Dico tres angulos GIF. FIE. EIB. eſſe inter ſe, ac ſingulos æquales ſemirecto.

Rur-

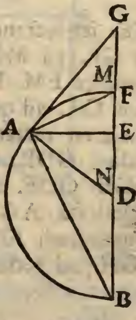
Rectus enim eſt vterque angulorum BIF. GIE. in ſemtcirculo : 31. 3. Coroll. 1. æqualis item eſt GIF. angulo FIE. ex 36. huius; vterque igitur ſemirectus eſt, ergo & ſemirectus reliquus EIB. anguli recti FIB. Igitur æquales ac ſemirecti ſunt tres anguli GIF. FIE. EIB. Quod erat propoſitum. 36. 3. huius.



THEOREMA XXXIX. PROPOS. XXXIX.

QVadratum tangentis arcus quadrante minoris, ad quadratum ſinus totius rationem habet quam rectangulum ſub aggregato ſinus totius & ſecantis, & ſub aggregato differentiæ ſecantis & dupli ſinus verſi, ad rectangulum ſub aggregato ſinus totius & dupli ſinus complementi, & ſub ſinu toto.

SINT eadem quæ ſuperiori propoſitione. Sed ipſi ED. nimirum ſinui complementi arcus AF. æqualis ſumatur EM. verſus G. & ſinui verſo EF. æqualis EN. verſus D. erit GN. aggregatum ex differentia ſecantis GF. & duplo ſinus verſi FE. EN. & MN. aggregatum ex ſinus complementi ME. id eſt ED. & ſinu verſo EF. ideoque MN. æqualis ſinui toto DF. & BG. aggregatum ex ſinu toto BD. &



ſecante DG. Denique BM. aggregatum ex BD. ſinu toto & DE. EM. duplo ſinus complementi. Dico eſſe vt quadratum GA. ad quadratnm AD. ita rectaugulum BGN. ad rectangulum BMN. Quoniam rectangulum
8.& 17.6. GED. eſt æquale quadrato AE. & rectangulum BEF. eidem quadrato AE. æqualia erunt rectangula GED. BEF. vt in progreſſu. 22. huius demonſtratum eſt, id eſt
14. 6. rectangula GEM. BEN. ergo vt BE. ad EG. ita ME.
12. 5. ad EN. & ſumptis antecedentibus, ſimul & conſequentibus ſimul, vt tota BM. ad totam GN. ita ME. ad EN. & conuertendo vt GN. ad BM. ita EN. ad ME. Rurſus quoniam rectangulum BEN. rectangulo GEM.
14. 6. æquale eſt, erit vt BE. ad EM. ita GE. ad EN. & ſumptis antecedentibus ſimul, & conſequentibus ſimul, vt tota BG. ad totam NM. ita GE. ad EN. erat au-
12. 5. tem vt GN. ad BM. ita EN. ad ME. Quare proportio compoſita ex rationibus BG. ad NM. & GN. ad BM. eadem eſt ei quæ componitur ex rationibus GE. ad
3. 3. huius. EN. & EN. ad ME. Igitur ex 3. huius vt GE. ad

BG.	NM.	GE.	EN.
GN.	BM.	EN.	ME.

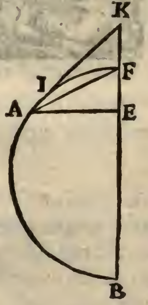
ME. ita rectangulum BGN. ad rectangulum BMN. Sed vt GE. ad ME. ita GE. ad ED. (cum poſitæ ſint æquales EM. ED) & vt GE. ad ED. ita quadratum GA. ad quadratum AD. (nam quadrato AG. æ-
8. & 17.6. quale eſt rectangulum DGE. & quadrato AD. rectangulum GDE. & poſita communi baſi DG. rectangula
1. 6. DGE; GDE. ſunt vt altitudines GE. ED. Quare etiam Quadrata AG. AD. ſunt vt GE. ED.) Igitur vt Quadratum AG. ad quadratum AD. ita rectangulum BGN. ad rectangulum BMN. Quod erat propoſitum.

THEO-

THEOREMA XL. PROPOS. XL.

SI à puncto in quo diameter peripheriam circuli ſecat in ipſa diametro æquales partes ſumantur; altera extra circulum, altera intra; & à puncto extra circulum in peripheriam tangens, à puncto intra ſinus ducatur arcum ſecans; Quadrata tangentis, & ſinus poſterioris arcus ſimul ſumpta ſunt dupla quadrati chordæ eiuſdem arcus.

Circulum FAB. ſecet diameter in F. puncto, à quo æquales ſumantur FE. FK. illa intra, hæc extra circulum, & tangat KI. circulum in I. & EA. perpendicularis ad BF. ſeu ſinus arcus FA. ſecet circulum in A. & ducatur chorda AF. Dico quadrata HI. & AE. ſimul eſſe dupla quadrati AF. Æquale enim eſt quadratum KI. rectangulo BGF. & quadratum FA. rectangulo BFE. & quadratum EA. rectangulo BEF. rectangulorum autẽ BKF. BFE. BEF. æqualis eſt altitudo FK. FE. FE. ex hypotheſi, ſunt igitur inter ſe vt baſes BK. BF. BE. quare etiam quadrata KI. FA. EA. ordine ſunt vt rectæ BK. BF. BE. Sed rectæ BK. BF. BA. ſunt in proportionalitate Arithmetica, cum æquales ſint earum diffe-



36. 3.

8. & 17. 6.

8. & 17. 6.

1. 6.

8.3.huius. differentiæ EF, FK. Igitur etiam, ex 8. 3. huius quadrata KI. FA. EA. ſunt in proportionalitate Arithmetica, quare quadrata KI. EA. ſimul ſumpta ſunt dupla quadrati FA. vt in Schol. propoſit. 7. 3. huius probatum eſt.

7.3.huius. Schol. propoſit. 2.

FINIS LIBRI III.

CVRVI

CVRVI AC RECTI Proportio promota.

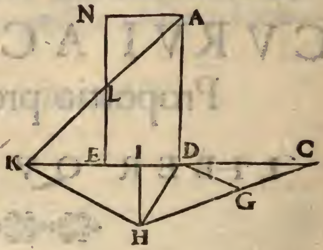
LIBER QVARTVS.

THEOREMA I. PROPOS. I.

SI trianguli amblygonij angulum obtuſum duas tertias duorum rectorum continentem recta ſecans faciat cum minori latere angulum rectum, & ex baſi auferat partem æqualem minori lateri: erit maius latus maior duarum mediarum proportionalium, quæ inter minus latns & eius duplum ſumi poſſunt.

SIT triangulum amblygorium HDC. cuius maius latus DC. minus DH. quibus contentus angulus obtuſus HDC. contineat duas tertias duorum rectorum, & ducta ex D. recta DG. ad HD. perpendicularis auferat ex baſi HC. rectam GC. æqualem rectæ DH. Dico latus DC. eſſe maiorem duarum mediarum proportionalium quæ inter latus DH. & eius duplum duci poſſunt. Producatur CD. quamtumlibet in K. & ducta ex D. ad CD. perpendiculari DA. quæ ſit dupla ipſius DH. Item DE. æquali ipſi DH. id

eſt



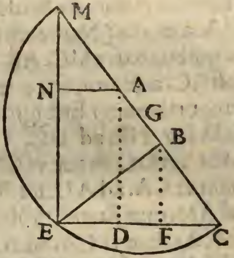
eſt medietati ipſius DA. compleatur parallelogrã DANE. diuiſoque latere EN. bifariam in L. ducta ALK. ſecet CD. productam in K. & connectatur KH. Denique ex H. ad CH. perpendicularis ducatur HI. Cum
13. 1. angulus HDC. ſit duæ tertiæ duorum rectorũ, erit reliquus HDI. vna tertia duorum rectorũ, id eſt duæ tertiæ vnius recti. ideoque HD. id eſt DE. dupla ipſius DI. Itemque cum angulus HDC. ſit duæ tertiæ duorum rectorum id eſt quatuor tertiæ vnius recti, dempto HDG. recto id eſt tribus tertijs vnius recti remanet GDC. vna tertia vnius recti. Rurſus cum in triangulus KEL. ALN anguli ad E. N. ſint recti, item anguli ad verticem L. & la-
26. 1. tera adiacentia EL. LN. ſint æqualia, æqualia erunt latera
38. 1. KE. NA. id eſt KE. ED. eſt igitur KD. dupla ipſius ED. id eſt ipſius DH. quæ poſita eſt ipſi ED. æqualis. Cum ergo ſit etiam HD. dupla ipſius DI. erit vt KD. ad DH. ita HD.
6. 6. ad DI. æquiangula igitur ſunt triangula KDH. HDI. angulus igitur DHK. rectus eſt, æqualis nempe angulo HID. & angulus HKD. æqualis angulo IHD. eſt vna tertia recti, ideoque æqualis angulo GDC. qui oſtenſus eſt vna tertia
28. 1. recti: parallelæ igitur ſunt KH. DG. Quare ex ijs quæ demonſtrara ſunt à Nicomede apud Pappum Alexandrinum lib. 3. collectionum mathematicarum prop. 5. & Eutocium in 2. de ſphera & cylindro Archimedis patet latus maius DC. eſſe maiorem ex duabus medijs proportionalibus poſitis inter DH, minus latus, & rectam DA. duplam lateris DH. Quod erat demonſtrandum.

THEO-

PROBLEMA I. PROPOS. II.

TRiangulum rectangulum conſtituere, ac parallela ad minus latus ita ſecare vt quatuor ſegmenta ſint in continua ratione.

Ducatur recta MC. vtcumque, quæ diuidatur in B. extrema ac media ratione: eademque diuiſa bifariam in G. deſcribatur ſemicirculus MEC. ad quem ducatur ex B. perpendicularis BE. ſecans ſemicirculum in E. & connectantur ME. CE. ipſique BC. accipiatur æqualis MA. & ex A. ad ME. ducatur perpendicularis AN. Dico factum eſſe quod proponebatur; nempe triangulū MEC. 31. 3.
rectangulum ad E. ita diuiſum recta NA. parallela ad EC. (quod minus eſſe latus mox oſtendemus) vt ſit velut AC. ad



NE. ita NE. ad AM. & AM. ad MN. Ducantur ad EC. perpendiculares AD. BF. Quoniam eſt vt CM. ad MB. ita MB. defin. 3. 6. 8. 6.
ad BC. erit MB. media proportionalis inter CM. BC. ſed e- 9. 5.
tiam CE. eſt media proportionalis inter CM. BC. æquales 7. 5. 8. 6.
igitur ſunt CE. MB. Quare vt EM. ad MB. ita EM. ad EC. 19. 1.
ſed vt EM. ad MB. ita CM. ad ME. vt igitur CM. ad ME. ita ME. ad EC. maior autem eſt baſis CM. latere ME. igitur e- 14. 5.
tiam maius eſt latus ME. latere EC. Rurſus quoniam acceptæ ſunt æquales MA. BC. addita communi AB. erunt MB. AC. æquales, æqualis autem eſt MB. ipſi EC. vt modo probatum eſt: igitur etiam æqualis eſt AC. ipſi EC. Et MC. etiā in A. ſecta eſt extrema ac media ratione, cum ſit vt CM. ad 7. 5
MA. ita CM. ad CB. quæ quidem CB. minus eſt ſegmentum ex hypotheſi. Cum vero in triangulis MNA. BFC. rectangulis ad N. & F. & æquiangulis ob parallelas NA. EC. æqua

26. 1. les ſint baſes BC. MA. ex hypotheſi, æqualia erunt latera FC. NA. & BF. MN. inter ſe. Iterum quoniam recta MC. ſecta eſt extrema ac media ratione in B. & A. erit tam MB. quam AC. maius ſegmentum, & tam MA. quam BC. mi-
Schol. 5. 13. nus: detracto igitur MA. ex MB. remanebit maius ſegmentum MB. ſectum extrema ac media ratione in A. eritque AB. minus, MA. maius ſegmentum. Quare cum æquales ſint BC. BA. ipſis MA. AB. etiam AC. ſecta erit extrema ac media ratione in B. Igitur in triangulo rectangulo ADC. ipſi MEC. ſimili ſimiliterque poſito baſis AC. ſecta eſt extrema ac media ratione in B. ideoque erit DC. ipſi BC. id eſt ipſi MA. æqualis (Nam cum ſimilia ſint triangula ADC. MEC. in quibus baſes MC. AB. ſimiliter ſectæ in A. B. ſitque AC. ipſi EC. æqualis, erit etiam BC. ipſi CD. æqualis ex regulis proportionum) Erit igitur vt CA. ad AD. ſeu ad NE. ita
34. 1. AD. ſeu NE. ad DC. (cum enim ſimilia ſint triangula MEC. ADC. ſitque vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. erit etiam vt CA. ad AD. ita AD. ad DC.) nempe ad CB. id eſt ad AM. quæ partim probatæ, partim ſumptæ ſunt æquales:
4. 6. ſed eſt etiam vt CA. ad AD. ita AM. ad MN. ergo vt EN.
11. 5. ad AM. ita AM. ad MN. probatum igitur eſt eſſe vt CA. ad NE. ita NE. ad AM. & AM. ad MN. Quare triangulum rectangulum conſtitutum eſt &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

Hinc manifeſtum eſt, ſi recta diuidatur extrema ac media ratione, ſuper qua conſtituatur triangulum rectangulum à cuius angulo recto perpendicularis ad baſim incidat in ſectionem, eſſe vt baſim ad maius, ita maius latus ad minus. Probatum enim eſt in propoſitione, in qua hæc effecta ſunt, eſſe vt CM. ad ME. ita ME. ad EC.

COROL-

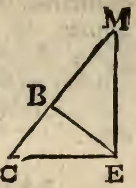
COROLLARIVM. II.

Conſtat etiam iiſdem poſitis maius ſegmentum baſis, minori lateri eſſe æquale. Demonſtratum namque eſt ſegmentum MB. lateri EC. eſſe æquale.

THEOREMA II. PROPOS. III.

SI in triangulo rectangulo ſit vt baſis ad maius latus, ita maius latus ad minus; demiſſa ex angulo recto perpendicularis in baſim ſecat eam extrema ac media ratione & maius ſegmentum minori lateri eſt æquale.

Repetatur figura propoſitionis præcedentis ac in triangulo rectangulo ad E. ſit vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. ſitque EB. ex angulo recto E. perpendicularis ad baſim MC. Dico MC. ſectam eſſe in B. extrema ac media ratione, & ſegmentum MB. lateri EC. eſſe æquale. Cum enim ſit ME. ad EC. vt CM. ad ME. ex



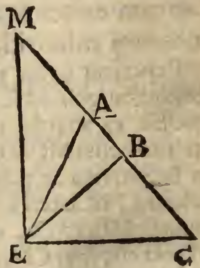
hypotheſi, & vt CM. ad ME. ita ME. ad 8. 6.
MB. erit vt ME. ad EC. ita ME. ad MB. 9. 5.
æquales igitur ſunt EC. & MB. quod ſecundo proponebatur. Rurſus quoniam
æquales ſunt EC. MB. erit vt MC. ad CE. 7. 5.
ita MC. ad MB. ſed vt MC. ad CE. ita EC. id eſt MB. ad 8. 6.
BC. vt igitur MC. ad MB. ita MB. ad BC. Quod primo propoſitum fuerat.

THEOREMA III. PROPOS. IV.

SI in triangulo rectangulo tria latera ſint continue proportionalia, baſiſque ſecetur extre-

ma ac media ratione, ſitque maius ſegmentum maiori lateri contiguum recta: ex angulo recto in ſectionem demiſſa eſt ad baſim perpendicularis.

SIT in triangulo rectangulo ad E. vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. & diuiſa MC. in B. extrema ac media ratione ducatur EB. & ſit MB. maius ſegmentum maiori lateri ME. contiguum. Dico EB. ad MC. eſſe perpendicularem. Si
3. huius. enim non, ſit quæpiam alia EA. perpendicularis ad baſim MC. erit ex præcedenti CM. ſecta in alio puncto vt in A. extrema ac
3. defin. 6. media ratione, ſed etiam ſecta eſt
17. 6. in B. extrema ac media ratione, ergo vt CM. ad MB. ita MB. ad BC. eſtque quadratum MB. rectangulo MCB. æquale eodem modo erit quadratum MA. rectangulo MCA. æquale, ſed rectangulum MCA. maius eſt rectangulo MCB. ergo quadratum MA. quadrato MB. erit maius, pars toto. Quod eſt abſurdum.



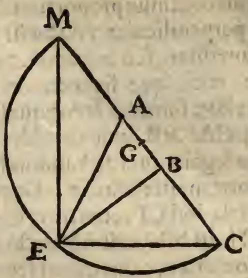
PROBLEMA II. PROPOS. V.

TRiangulum rectangulum conſtituere cuius tria latera, & baſis ab angulo recto ad baſim ſint continue proportionalia.

Ducatur recta MC. vtcumque quæ diuidatur in B. extrema ac media ratione; eadem bifariam diuiſa in G. deſcribatur ſemicirculus MEC. ad quem ducatur ex B. perpendicularis BE. & connectantur ME. EC. Dico factum eſſe quod

THEO-

proponebatur, nempe eſſe vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. & EC. ad EB. Ac primo quidem eſſe vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. patet ex Corollario primo præcedentis. Quod vero ſit vt ME. ad EC. ita EC. ad EB. probatur, eſt enim vt ME. ad EC. ita CM. ad ME. ex dicto Corollario, ſed vt CM. ad *ME*. ita CE. ad EB. ergo vt *M*E. ad EC; ita EC. ad EB. Igitur triangulum rectangulum conſtituimus, &c. Quod erat faciendum.



Coroll. 1. 2. 4. huius.

8. 6.

COROLLARIVM.

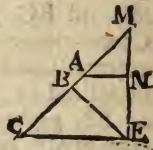
Manifeſtum etiam eſt in eodem triangulo minus ſegmentum BC. eſſe quatuor rectis CM. ME. EC. EB. quinto loco proportionale: Cum enim triangulum EBC. triangulo CME. ſit ſimile, ſitque vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. erit etiam vt CE. ad EB. ita EB. ad BC. 8. 6.

THEOREMA IV. PROPOS. VI.

SI trianguli rectanguli cuius tria latera ſunt continue proportionalia latus maius proportionaliter ſectum fuerit: erit maius ſegmentum perpendiculari ab angulo recto ad baſim ductæ æquale.

Trian-

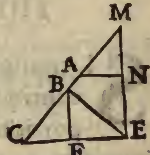
Trianguli *M*EC. rectanguli ad E. tria latera C*M*. *M*E.
Coroll. 1. 2.4.huius. EC.ſint continue proportionalia, a cuius angulo E.in baſim C*M*. perpendicularis ducta ſit EB. erit C*M*. in B. ſecta proportionaliter, ſeu extrema ac media ratione, minuſque ſegmentum erit CB. maius B*M*. ſumatur *M*A.æqualis ipſi CB. erunt CA. *M*B. æquales ideoque AC. maius ſegmentum *M*A.minus lineæ *M*C. proportionaliter diuiſæ. Ducatur AN. parallela ipſi CE. cum ſit vt CA.ad A*M*.



2. 14. ita EN. ad NM. erit EM.ſecta in N. pro-
8. 6. portionaliter, cuius maius ſegmentum EN. minus N*M*.Dico EN. eſſe æqualem ipſi EB. Nam vt *M*E. ad EB. ita *M*C. ad CE. & vt *M*C. ad CE. ita *M*C. ad *M*B. (æquales enim
3.4.huius. 4. 6. ſunt EC. *M*B. ex Scholio 2. 4. huius) & *M*C. ad AC. (nam æquales oſtenſæ ſunt AC. *M*B.) & vt *M*C. ad AC. ita ME. ad EN. ergo à primo ad vltimum vt *M*E. ad EB. ita *M*E. ad
9. 5. EN. æquales igitur ſunt EB. EN. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

E*x dictis facile demonſtrari poteſt rectas etiam NA. AB. eſſe æquales. Ducta enim ad EC. perpendiculari BF.*
8. 6. *cum duo triangula CEM. EBC. ſimilia ſint, & ſimiliter ſecta in F. B. ſitque MB. æqualis ipſi EC. erit EF. æqualis ipſi BC. ſi igitur ex æqualibus EC. CA. auferantur æquales EF. CB. remanent æquales FC. AB.*
26. 1. *ſed ipſi FC. eſt æqualis NA. (nam in triangulis æquiangulis BFC. MNA. etiam latera MA. BC. ſunt æqualia ideoque & reliqua NA. FC.) æquales igitur ſunt AB. AN.*

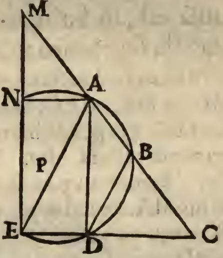


THEO-

THEOREMA V. PROPOS. VII.

SI intra triangulum rectangulum rectæ ab eodem puncto baſis ad vtrumque latus perpendiculares ducantur, circa quas deſcriptus circulus in baſi æqualem minori perpendicularium interius compræhendat, exterius duas partes æquales rlinquat: ſecabitur baſis à circnlo extrema ac media ratione, eruntque tria latera trianguli in continua ratione.

Intra triangulum rectangulum MEC. à puncto baſis A.
ducantur duæ AN. AD. perpendiculares; illa ad maius latus ME. iſta ad minus EC. & deſcriptus circulus NAB. centro P. circa parallelogrammum NADE. abſcindat ex baſi MC. interius rectam AB. æqualem ipſi AN. & rectæ AM. BC. ſint æquales. Dico baſim MC. ſectam eſſe, tam in A. quam in B. extrema ac media ratione: Itẽque eſſe vt CM. ad ME. ita ME. ad



EC. Connectantur BD. AE. Quoniã æquales ſunt NA. ED. 34. 1.
item NA. AB. ex hypotheſi, æquales erunt ED. AB. paral-
lelæ igitur ſunt AE. BD. (Nam cum æquales ſint arcus ED. 28. 3.
AB. addito communi BD. æquales erunt arcus EB. AD. 27. 3.
ideoque æquales anguli AED. EAB. & eodem modo angu- 22. 3.
li EDB. ABD. probantur æquales, ſunt autem anguli AED.
ABD. æquales duobus rectis, igitur AED. EDB. ſunt æqua-
les duobus rectis, ac propterea AE. BD. paralelæ) igitur vt 28. 1.
AB. ad AC. ita ED. ad EC. æquales igitur ſunt AC. EC. 2. 6. 9. 5.

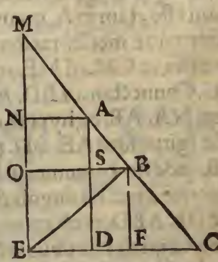
ſed

ſed ipſi CA. eſt æqualis BM; (cum enim poſitæ ſint æquales
Schol. 31. 3. MA. BC. addita communi BA. erunt æquales CA. BM.)
31. 3. æquales igitur ſunt CE. MB. Rurſum cum ſemicirculus ſit
ADE. continens angulum rectum EDA. erit etiam ABE. angulus rectus. Quare cum latus minus EC. ſic æquale maiori
Schol. 2. 4. huius. ſegmento MB. erit, ex demonſtratis in ſuperioribus propoſitionibus CM. ſecta in B. aut A. extrema ac media ratio-
Coroll. 2. 2.4. huius. ne, ideoque etiam ex dictis erit vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA VI. PROPOS. VIII.

SI in triangulo rectangulo cuius tria latera ſunt continuè proportionalia à puncto baſis in quod ex angulo recto perpendicularis demiſſa eſt, in latus maius perpendicularis ducatur erit illa ſegmento minori baſis æqualis.

In triangulo rectangulo MEC. ſit vt baſis CM. ad latus ME. ita ME. ad EC. & ex angulo MEC. ducatur EB. ad baſim MC. perpendicularis, & ex B. ad latus maius ME. perpendicularis BO. Dico BO. ipſi BC. eſſe æqualem. Sumatur vt in ſecunda huius MA. æqualis ipſi CB. & ducantur perpendiculares AN. ad ME. & AD. ad EC. ſecans OB. in S. Item ducatur perpendicularis BF. ad EC. Cum
34. 1. OS. NA. ſint æquales itemque NA. & FC. vt 2. huius oſtendimus erunt OS. FC. æquales, additis igitur æqualibus æquales erunt OB. DC. at vero æqualis eſt DC. ipſi BC. vt 2. & tertia huius oſtenſum eſt, æquales igitur ſunt OB. BC. Quod erat demonſtrandum.

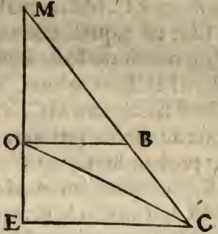


THEO-

THEOREMA VII. PROPOS. IX.

SI angulum obliquum maiorem in triangulo rectangulo cuius latera continue proportionalia diuidens recta ſecet oppoſitum latus extrema ac media ratione, ſecabit dictum angulum bifariam : & ſi ſecet bifariam ſecabit extrema ac media ratione.

SIT rurſus triangulum MEC. in quo vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. & recta CO. diuidens angulum maiorem MCE. ſecet oppoſitum latus ME. in O. extrema ac media ratione, ita vt OM. ſit maius ſegmentum OE. minus. Dico angulum ECO. eſſe æqualem angulo OCM. Ducatur OB. parallela ipſi EC. erit vt MO. ad OE. ita MB. ad BC. ſecta eſt autem ME. in O. extrema ac media ratione; igitur etiam MC. in B. eodem modo ſecta eſt, æqualis igitur eſt EC. ipſi MB. ex 3. huius. Vt igitur MC. ad CE. ita MC. ad MB. id eſt EM. ad MO. id eſt MO. ad OE. æqualis igitur eſt angulus ECO. angulo OCM. Quod prius erat oſtendendum.



2. 6.
2. 14.
3. huius.
7. 5.
4. 6.
defin. 3. 6.
3. 6.

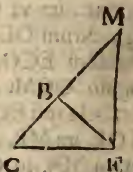
Sed rurſus in triãgulo prædicto ſectus ſit angulus ECM. recta CO. bifariam. Dico rectam EM. ſectam eſſe in O. extrema ac media ratione. Nam quoniam angulus ECM. ſectus eſt bifariam erit vt MC. ad CE. id eſt vt CM. ad MB. ita MO. ad OE. ſed vt MO. ad OE. ita MB. ad BC. ergo vt CM. ad MB. ita MO. ad OE. ſed vt CM. ad MB. ita EM. ad MO. Igitur vt MO. ad OE. ita EM. ad MO. Igitur ſecta eſt MC. in O. extrema &c. Quod erat &c.

3. 6.
3. huius.
3. 6.
4. 6.

THEOREMA VIII. PROPOS. X.

SI in triangulo rectangulo perpendicularis ex angulo recto in baſim demiſſa auferat ſegmentum æquale minori laterit: erit baſis ſecta extrema ac media ratione, & tria latera continue proportionalia.

IN triangulo rectangulo MEC. perpendicularis EB. ex angulo recto E. ad baſim MC. ducta auferat ſegmentum MB. æquale minori lateri EC. Dico MC. eſſe ſectam in B. extrema ac media ratione; & eſſe vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. Nam quoniam æquales ſunt EC. MB. ex hypotheſi erunt quadrata EC. MB. æqualia, ſed quadra-
8.& 17. 6. to EC. eſt æquale rectangulum MCB.
Igitur quadrato MB. æquale eſt rectan-
17. 6. gulum MCB. vt igitur CM. ad MB. ita
3. defin. 6. MB. ad BC. quare MC. ſecta eſt in B. ex-
trema ac media ratione. Quod primo erat probandum.



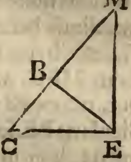
8.& 17. 6. Rurſus quoniam quadratum EM. eſt æquale rectangulo CMB. ipſi autem MB. æqualis ponitur EC. erit rectangu-
17. 6. lum MCB. æquale quadrato ME. Igitur vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. Quod ſecundo efficiendum erat.

THEOREMA IX. PROPOS. XI.

SI in triangulo inæqualium laterum, continue proportionalium ex angulo in oppoſitum latus recta ducatur illud ſecans extrema ac media ratione, ita vt maius ſegmentum maiori lateri adhærens ſit æquale minori laterum: angu-

li tam ex quo recta ducta eſt, quam quos cum latere occurente facit, recti ſunt.

Sit triangulum MEC. inæqualium laterum, ita vt ſit ſicut CM. ad ME. ita ME. ad EC. & ex angulo E. ducta EB. in latus MC. illud ſecet in B. media & extrema ratione, ſitque ſegmentum contiguum lateri ME. æquale lateri EC. Dico angulos MEC. EBC. eſſe rectos. Nam quoniam recta MC. ſecta eſt in B. extrema ac media ratione, ex hypotheſi, erit rectangulum MCB. quadrato MB. id eſt quadrato EC. (ponuntur enim æquales MB. EC.) æquale. Rurſus quia ex ſuppoſitione eſt vt CM. ad ME. ita ME. ad EC. erit quadratum ME. rectangulo MCE. id eſt CMB. æquale. Quare duo rectangula MCB. CMB. duobus quadratis CE. EM. æqualia ſunt, at duobus rectangulis MCB. CMB. æquale eſt quadratum CM. Igitur quadratum CM. æquale eſt duobus quadratis CE. EM. Igitur rectus eſt angulus MEC. Quod primo probandum fuit.



defin. 3. & 17. 6.

17. 6.

2. 2.

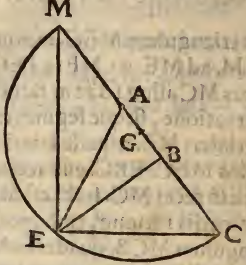
48. 1.

Sed dico etiam EBC. eſſe rectum, ſeu EB. eſſe perpendicularem ad MC. Nam cum in triangulo rectangulo MEC. ex angulo recto MEC. ducta ſit EB. ad MC. ſecans illud extrema ac media ratione, ſintque tria latera CM. ME. EC. continue proportionalia erit EB. ad MC. perpendicularis. 4. huius.
Quod ſecundo demonſtratione comprobandum erat.

PROBLEMA III. PROPOS. XII.

TRiangulum Iſoſceles deſcribere ex cuius angulis ad oppoſita latera æqualia ductæ perpendiculares ea ſecent propartionaliter.

Ducatur recta MC. vtcumque quæ diuidatur in B. extrema ac media ratione, ſeu (quod idem eſt, vt a multis vſurpatur) proportionaliter: eademque diuiſa bifariam in G. deſcribatur ſemicirculus MEC. ad quem ducatur ex B. perpendicularis BE. ſecans ſemicirculum in E. & connectatur ME. CE.



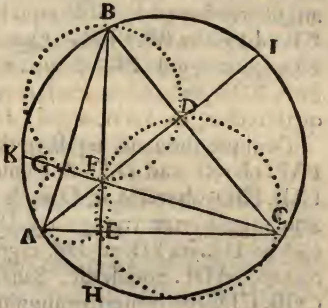
ipſique BC. accipiatur æqualis MA. atque connectatur EA. Dico triangulum ACE. eſſe Iſoſceles, cuius latera EC. AC. ſunt æqualia, & latus AC. perpendiculari EB. ſectum eſt proportionaliter. Quoniam æquales ſunt poſitæ BC. MA. addita communi AB. æquales
3. huius. erunt MB. AC. ipſi autem MB. eſt æqualis EC. Igitur etiam ipſi AC. eſt æqualis EC. Triangulum ergo Iſoſceles eſt ACE. ſed MB. eſt maius ſegmentum lineæ MC. proportionaliter ſectæ: igitur etiam AC. eſt maius ſegmentum lineæ MC. proportionaliter ſectæ, ſed
Schol. 5. 10. BC. eſt minus ſegmentum: ergo CA. ſecta eſt extrema ac media ratione, ſeu proportionaliter in B. cuius maius ſegmentum BC. minus BA. Quare triangulum Iſoſceles deſcripſimus &c. Quod erat faciendum.

THEO-

THEOREMA X. PROPOS. XIII.

SI in triangulo oxygonio ex ſingulis angulis ad latera oppoſita perpendiculares ducantur: rectangula ſub lateribus aut perpendicularibus ac ſegmentis in idem anguli punctum deſinentibus . item ſub perpendicularium ſegmentis contenta: denique ea quæ ſub laterum ſegmentis & ijs quæ ſub perpendicularibus ex oppoſito angulo in latus cadentibus, & ſegmento perpendicularis inter punctum concurſus, & latus contento comprehenduntur rectangula æqualia ſunt.

SIT triangulum oxygonium ABC. ex cuius ſingulis angulis demittātur ad oppoſita latera perpendiculares AD. BE. CG. quæ quidem omnes ſeſe interſecabunt in vno puncto F. vt primo à Pappo Alexandrino demonſtratum eſt lib. 7. collect. Mathemat. propoſit. 60. hinc fuſius à Io: Camillo Glorioſo, exercit. 2. Theor. 4. Dico rectangula ABG. CBD. EBF. lateribus AB. CB. perpendiculari que EB. ac ſegmentis GB. DB. FB. in idem anguli punctum B. deſinentibus contenta inter ſe eſſe æqualia: item rectangula BAG. CAE. DAF. ijſdem lateribus ac ſegmentis GA. EA. FA. in punctum A. deſinentibus comprehenſa, ad hæc rectangula BCD. GCF. ACE. in punctum. C. deſinentia



nentia

nentia inter ſe eſſe æqualia: Inſuper rectangula BFF. DFA. CFG. quæ ſegmenta perpendicularium continent, itidem inter ſe eſſe æqualia. Denique rectangulum CDB. rectangulo ADF. & BGA. ipſi CGF. & AEC. ipſi BEF. eſſe æquale. Nam quoniam in quadrilatero AGFE. anguli oppoſiti

Schol. 22. 3. G. E. ſunt recti, erit ipſum in circulo: atque eandem ob cauſam quadrilatera BGFD. DFEC. erunt in circulo. Circumſcribantur igitur illis circuli AGFE. BGFD. DFEC. tranſibunt primus & ſecundus per eadem puncta G. F. ſecundus & tertius per eadem puncta F. D. primus & tertius per eadem F. E. Quare cum lineæ AC. GC. ſecent eundem circu-

Coroll. 1. 36. 3. lum AGFE. erunt rectangula ACE. GCF. æqualia Item quia rectæ GC. BC. ſecant eundem circulum GBDF. in pũctis F. D. erunt rectangula ſub GCF. BCD. inter ſe æqua-

axiom. 1. lia: quare & æqualia erunt rectangula ACE. BCD.

Eodem modo oſtendemus BAG. DAF. CAE. inter ſe, item CBD. EBF. ABG. rectangula eſſe æqualia.

32. 1. 4. 6. Præterea cum æquiangula ſint triangula CFE. BFG. ob angulos rectos ad E. G. & æquales ad verticem F. erit vt

16. 6. CF. ad FE. ita BF. ad FG. Quare rectangulum CFG. erit æquale rectangulo BFE. & quia æquiangula ſunt triangula

1. pron. FEA. FDB. ob eandem, cauſam erit rectangulum BFE. æquale rectangulo DFA. & ipſi CFG.

32. 1. Denique quoniam æquiangula ſunt triangula DAC. FAE. ob rectos ad D. E. & comunem A. item triangula FAE. FBD. ob rectos ad D. E. & æquales ad verticem F.

4. 6. 16. 6. æquiangula erunt triangula CDA. FDB. Quare erit vt CD. ad DA. ita FD. ad DB. ergo rectangulum CDB. rectangulo ADF. æquale eſt. Rurſus quia ſunt æquiangula CGB. CDF. ob comunem angulum ad C. & rectos ad D. G. item triangula FDC. GFA. ob rectos ad D. G. & æquales ad verticem F. etiam æquiangula erunt triangula CGB. GFA. ideoque erit vt CG. ad BG. ita AG. ad GF. ergo rectangula CGF. BGA. ſunt æqualia. Tandem eodem modo ex eo quod triangula CEB. EAF. ſint æquiangula inter

ſe

ſe qnia æquiangula tertio ADC. oſtendemus rectangulum CEA. eſſe æquale rectangulo BEF.

SCHOLIVM.

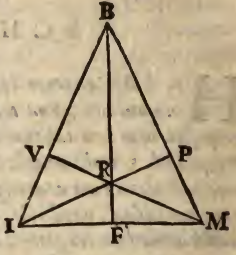
Hic habes quatuor coniugationes vbi terna inter ſe, & vnam vbi terna ternis rectangula æqualia ſunt; quam propoſitionem non tantum triangulo æquicruri aptauimus, vt Pappus lib. 5. Coll: Math: Theor. 1. ad propoſitionem 25. ſed etiam ſcaleno tam acutangulo, quam obtuſangulo; nec vnum tantum caſum, quod ille, ſed ad octodecim demonſtratione haud admodum longiore, certe multo faciliore complexi ſumus. Quod ſi in ſuperiori figura triangulum ABC. circulo comprehendamus, ac perpendiculares AD. BE. CG. in circumferentiam vſque producamus in puncta I. H. K. erunt earum partes extra triangulum, partibus intra triangulum latere ac puncto concurſus definitæ æquales; nempe DI. ipſi DF. HE. ipſi EF. & KG. ipſi GF, nam rectangulo CDB. oſtenſum eſt æquale rectangulum ADF. & eidem rectangulo CDB. æquale erit rectangulum ADI. æqualia igitur ſunt rectangula ADF. 16. 6.
ADI. atque adeo æquales DF. DI. atque eodem modo probabitur æquales eſſe reliquas. Schol. 1. 6.

THEOREMA XI. PROPOS. XIV.

SI ex trianguli Iſoſcelis ſingulis angulis perpendiculares ſecent oppoſita latera extrema ac media ratione; rectangulum ſub latere ac maiori ſegmento, æquale eſt quadtato perpendicularis in latus cadentis.

SIT triangulum Iſoſceles IBM. cuius latera IB. MB. æqualia, ex cuius angulis emittantur ad oppoſita latera perpendiculares IP. MV. & ad baſim ipſam perpendicularis BF. (quæ tranſibunt omnes per vnum punctum R. vt ſu-

Pappus lib. 7. Pro. 60. pra probatum eſt) ſecentur autem latera in punctis V. P.
13. huius. extrema ac media ratione ſintq; ſegmenta maiora BV. BP. minora VI. PM. Dico rectangulum IBV. Quadrato IP. eſſe æquale. Nam quadratum BI. æquale
2. 2. 47. 1. eſt rectangulis IBV. BIV. Item quadratis BP. PI. Igitut duo triangula IBV. BIV. æqualia ſunt duobus quadratis BP. PI. Rectangulo autem BIV. æquale eſt quadratum BV. (nam cum diuiſa ſit BI. proportionaliter in V. cuius maius ſegmentum BV. erit vt IB.

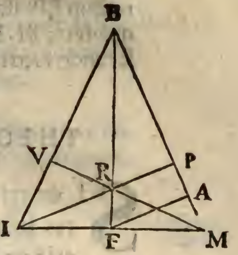


17. 6. ad BV. ita BV. ad VI. ideoque rectangulum BIV. quadrato BV. æquale eſt) igitur rectangulum IBV. & quadratum BV. ſunt æqualia quadratis BP. PI. Quadratum autem BV. eſt æquale quadrato BP. (nam cum æquales ſint BI. BM. & æqualiter diuiſæ, erunt BV. BP. æquales) ſi igitur ex æqualibus, rectangulo IBV. cum quadrato BV. & duobus quadratis BP. PI. æqualia demantur quadrata BV. BP. temanent æqualia rectangulum IBV. & quadratum PI. Quod erat oſtendendum.

THEOREMA XV. PROPOS. XII.

SI ex trianguli Iſoſcelis angulis perpendiculares ſecent oppoſita latera proportionaliter : Quadrata lateris, perpendicularis ad baſim; perpendicularis ad latus, erunt in proportionalitate Arithmetica, quorum differentia quadratum dimidiæ baſis; & ordine eandem habebunt rationem, quam latus, compoſita ex maiori ſegmento cum dimidio minoris, & maius ſegmentum.

SIT



SIT triangulum æquicrure IBM. cuius latera æqualia IB. MB. baſis IM. ex cuius angulis ad oppoſita latera, ad baſim ductæ ſint perpendiculares IP. MV. BF. ſecantes ſe in puncto R. ex dictis propoſit. 13. huius, & latera in punctis V. P. ita vt rectæ IB. MB. ſectæ ſint proportionaliter in V. P. Sintq; BV. BP. maiora ſegmenta. VI. PM. minora, & PA. dimidium ſegmenti minoris. Dico quadrata rectarum BI. BF. IP. eſſe in proportionalitate Arithmetica, cuius exceſſus ſit quadratum IF. Et eſſe, vt quadratum BI. ad quadratum BF. & quadratum BF. ad quadratum IP. ita latus MB. ad rectam AB. compoſitam ex AP. medietate ſegmenti minoris, cum PB. ſegmento maiori, & hanc ad maius ſegmentum BP.

Connectatur AF. Quoniam PM. ex hypotheſi, diuiſa eſt bifariam in A. & IM. bifariam in F. erit vt MA. ad AP. ità MF. ad FI. ideoque parallelæ erunt AF. PI. Rurſus quadratum IB. excedit quadratum BF. quadrato IF. Cum vero quadratum BF. ſit æquale duobus rectangulis FBR. BFR. ſit autem rectangulum FBR. æquale rectangulo IBV. ex 13. huius, & rectangulum IBV. quadrato IP. vt ſupra propoſit. 14. probatum eſt, excedet quadratum BF. quadratum IP. rectangulo BFR. ideſt quadrato IF. quod paulo ante probatum eſt eſſe æquale rectangulo BFR. Igitur Quadrata BI. BF. IP. ſunt in proportionalitate Arithmetica, quorum differentia quadratum IF. Quod prius probandū erat.

Schol. 26. 1. | 2. 6. | 47. 1. | 2. 2: | 13. huius. | 14. huius. | 13. huius.

Præterea cum æquiangula ſint triangula IBF. FBA. ob angulos rectos ad FA. & æquales IBF. FBA. erit vt IB. ad BF. ita BF. ad BA. igitur eſt vt IB. ideſt MB. ad BA. ita quadratum IB. id eſt MB. ad quadratum BF. & conuertendo. Itē quoniā eſt, vt BI. ad IP. ita IP. ad PB. vt ſupra oſtenſum eſt, erit vt IB. ſeu MB. ad PB. ità quadratū IB. ſeu MB. ad quadratum IP. Quare ex æqualitate, erit etiam vt recta AB. ad

Schol. 26. 1. | Coroll. 20. 1. | 2. huius. | Schol. 20. 6.

rectam BP. ita quadratum BF. ad quadratum IP. Igitur quadrata BI. BF. IP. ſe habent vt rectæ MB. AB. PB. Quod ſecundo loco oſtendendum erat.

THEOREMA XIII. PROPOS. XVI.

SI ex trianguli Iſoſcelis angulis perpendiculares ſecent oppoſita latera proportionaliter: erit vt latus Hexagoni ad latus decagoni, ita latus ad maius ſegmentum; vt vero latus quadrati ad latus Hexagoni, ità maius ſegmentum lateris, ad ſegmentum baſis; & vt latus quadrati ad latus decagoni, ita latus ad ſegmentum baſis; denique vt latus Hexagoni, ad latus quadrati, ita maius ſegmentum lateris ad totam baſim.

SINT in eodem triangulo IBM. Iſoſcele ex angulis ſecta latera proportionaliter, modo ſæpe ſuperius inculcato. Dico eſſe vt latus Hexagoni ad latus Decagoni, ita IB. ad BV. & vt latus quadrati ad latus Hexagoni, ita BV. ad IF. & vt latus quadrati ad latus decagoni ità BI. ad IF. denique vt latus quadrati ad latus Hexagoni, ita IM. ad BV.



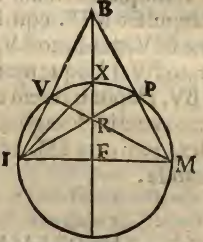
Ac primum quidem aio rectam IB. ad ſegmentum maius rationem habere quam latus Hexagoni ad latus Decagoni. Nam ſi componantur in v-
5. 13. nam lineam rectam duæ IB. BV. tota recta ſecundum extre-

mam

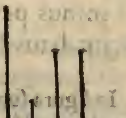
mam ac mediam rationem ſecabitur in B. eritque IB. maius ſegmentum, BV. minus; quare ſi IB. ponatur latus Hexagoni, erit BV. latus decagoni habebuntque hæ rectæ rationem, quam latus Hexagoni ad latus Decagoni. Schol. 9. 13.

Secundo, centro F. diſtantia FM. FI. deſcribatur circulus ſecans B. F. in X. & connectatur IX. Cum quadratum VB. ſit æquale rectangulo BIV. (vt 14. huius probatum eſt) & hoc rectangulo MIF. ex 13. huius, rectangulum autem MIF. duplum eſt quadrati IF. erit quadratum BV. duplum quadrati IF. eſt autem & IX. duplum quadrati IF. æqualia igitur ſunt quadrata, itemque latera VB. IX. ſed IX. in circulo MXI. eſt latus quadrati, IF. latus Hexagoni; Igitur vt IX. latus Quadrati, ad IF. latus Hexagoni, ita BV. ad IF.

14. huius. 13. huius. 1. 6. Schol. 47. 1. 6. 4. Coroll. 15. 4.



Tertio, Aſſumatur linea O. æqualis ipſi BI. & P. ipſi IF. & duæ Q. R. æquales ipſis BV. XI. fiatque vt O. ad P. ita Q. ſeu R. ad S. ſtatuaturque ipſa BI. ſeu O. ſemidiameter circuli, circa ipſam deſcripti, ſeu latus Hexagoni, & IF. ſeu P. ſemidiameter circuli MXI. & BV. ſeu Q. latus decagoni reſpectu ſemidiametri IB. quod paulo ante probatum eſt; & IX. ſeu R. latus quadrati in circulo MXI. Quoniam factum eſt vt O. ad P. ita Q. ad S. erit permutando, vt O. ad Q. ita P. ad S. ſed O. ad Q. rationem habet quam latus Hexagoni ad latus Decagoni, vt modo probatum eſt, igitur P. ad S. rationem habebit, quam latus Hexagoni ad la-



tus decagoni, eritque S. in circulo cuius ſemidiameter eſt IF. ſeu in circulo MXI. latus decagoni in quo etiam recta R. ſeu IX. eſt latus quadrati. Sed vt Q. ad S. ita R. ad S. cum æquales ſint Q. & R. habet autem R. ad S. rationem quam latus Quadrati ad latus decagoni, & vt R. ad S. ita poſita eſt O. ad P. ideſt BI. ad IF. igitur vt latus Quadrati ad latus Decagoni ita O. ad P. ſeu BI. ad IF.

13. huius. Denique quoniam ex ſuperioribus propoſitionibus re-
14. huius. ctangulum MIF. æquale eſt rectangulo BIV. & rectangulum BIV. quadrato BV. erit rectangulum MIF. æquale qua-
1. 6. drato BV. ideoque totum quadratum MI. duplum quadrati BV. Duplum autem eſt quadratum lateris quadrati, quadrato lateris Hexagoni. Igitur vt latus Quadrati ad latus Hexagoni, ita IM. ad BV. Quæ omnia fuerunt demonſtranda.

THEOREMA XIV. PROPOS. XVII.

Iiſdem poſitis Baſis ad minus ſegmentum lateris; item maius ſegmentum perpendicularis lateris ad minus perpendicularis baſis; denique maius ſegmentum perpendicularis baſis, ad minus perpendicularis lateris habent rationem quam latus Quadrati ad latus Decagoni.

In figura ſuperiori. Dico baſim MI. ad minus ſegmentum lateris IV. Item maius ſegmentum IR. perpendicularis lateris, ad RF. minus ſegmentum perpendicularis baſis: denique BR. maius ſegmentum perpendicularis baſis ad RV. minus ſegmentum perpendicularis lateris, rationem habere quam latus quadrati ad latus Decagoni. Similia ſunt triangula BIF. IMP. ob rectos ad F. & P. & æquales ad I. M. item triangula IMP. IRF. ob communem angulum

ad

ad I. & rectos ad FP. denique triangula IRF. BRP. ob æquales ad verticem R. & rectos ad P. F. vt igitur BI. latus 4. 6.
quadrati ad IF. latus Decagoni (vt in propoſitione demonſtratum eſt) ita IM. ad MP. & IR. ad RF. & BR. ad RP. 17. huius.
Quod fuit probandum.

THEOREMA XV. PROPOS. XVIII.

Iſdem poſitis: Dico, maius ſegmentum perpendicularis baſis BR. ad maius perpendicularis lateris RI. rationem habere quam latus quadrati ad latus Hexagoni.

Cum enim paulo ante in prop. 17. huius oſtenſa ſint ſimilia triangula IFR. BPR. item ſimilia etiam ſint triangula BPR. BVR. ob æquales angulos ad B. & rectos ad PV. erit 4. 6.
igitur vt VB. ad BR. ita FI. ad IR. & permutando vt VB. ad IF. ita BR. ad IR. ſed VB. ad IF. probata eſt in propoſitione 16. habere rationem quam latus quadrati ad latus Decagoni: igitur vt latus quadrati ad latus Hexagoni, ita BR. ad IR. Quod fuit demonſtrandum. 16. huius.

THEOREMA XVI. PROPOS. XIX.

IN triangulo Iſoſcele ex cuius angulis perpendiculares ſecant oppoſita latera proportionaliter; etiam perpendiculares laterum ſeſe proportionaliter ſecant, maiuſque ſegmentum eſt ab angulo ad punctum contactus.

SIT rurſus triangulum Iſoſceles IBM. quale propoſitum eſt, ac ſuperioribus propoſitionibus deſcriptum eſt.

Dico

Dico tam IP. quam MV. perpendiculares ſecari proportionaliter in puncto R. maiuſque ſegmentum eſſe IR. minus RP. item maius MR. minus RV.



Nam cum facta prima IM. cum ſecunda MB. angulum ad M. & ab extremitatibus primæ, & ſecundæ I. B. ductæ ſint IP. BF. tertia & quarta concurrentes in R. puncto, & ſecantes oppoſita BM. in P. & IM. bifariam in F. erit per. 19. huius vt MB. ad BP. id eſt vt BP. ad PM. ita IR. ad RP. ſed BP. eſt maius ſegmentum lineæ proportionaliter ſectæ, PM. minus. Igitur etiam IR. eſt maius ſegmentum, RP. minus lineæ IP. proportionaliter ſectæ. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XVII. PROPOS. XX.

SI in triangulo Iſoſcele ex cuius angulis perpendiculares ſecant oppoſita latera proportionaliter, ſegmentum minus perpendicularis ad baſim duplicetur; ſecabitur aggregatum perpendicularis & minoris ſegmenti in puncto concurſus proportionaliter, cuius minus ſegmentum erit duplum minoris ſegmenti, & maius, maius ſegmentum perpendicularis.

SIT iterum triangulum Iſoſceles quale ſæpe ſuperioribus propoſitionibus delineatum eſt. Producatur perpendicularis baſis BF. in G. ſintque RF. FG. æquales. Dico

BG.

BG. ſectam eſſe in R. proportionaliter, cuius minus ſegmentum GR. maius RB. Nam quia ex 18. propoſitione tertij huius eſt vt MP. ad PB. ita FR. ad medietatem ipſius RB. erit vt MP. ad PB. ita duplum FR. videlicet tota RG. ad totam RB. ſecta eſt autem MB. in P. proportionaliter, ex hypotheſi, cuius minus ſegmentum MP. maius PB. Igitur & GB. ſecta eſt proportionaliter in R. cuius minus ſegmentum GR. maius RB. Quod erat demonſtrandum.



18.3. huius.

15. 5.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XXI.

IN triangulo Iſoſcele ex cuius angulis perpendiculares ſecant oppoſita latera proportionaliter: medietas aggregati ex perpendiculari ad baſim & minori eius ſegmento eſt æqualis maiori ſegmento eiuſdem perpendicularis proportionaliter ſectæ.

SIT idem triangulum Iſoſceles quod ſuperiori propoſitione IBM. & producta FG. ſit æqualis ſegmento FR. & connectatur PG. item PV. ſecans BF. in H. Cum ſint æquales BP. BV. item BM. BI. parallelæ erunt MF. PH. 2. 6. & vt BP. ad PM. ita BH. ad HF. ideoque cum BM. ſit ſecta proportionaliter in P. ſitque maius ſegmentum BP. minus PM. erit BF. ſecta proportionaliter in H. maiuſque ſegmentum BH. minus HF. Dico HG. eſſe medietatem ipſius BG. aut æqualem ipſi HB. Cum enim PR. ad RF. rationem habeat quam latus quadrati ad latus Hexagoni, erit quadratum PR. duplum quadrati RF. ſed

2. 14.

16. huius.



etiam rectangulum GRF. eſt
1. 6. duplum quadrati RF. igitur
æquale eſt quadratum PR.
17. 6. rectangulo GRF. ergo vt GR.
ad RP. ita RP. ad RF. æqui-
6. 6. angula igitur ſunt triangula
4. 6. GRP. PRF. vt igitur PR. ad
RF. ita GR. ad RP. ſed PR.
16. huius. ad RF. rationem habet quam
latus Quadrati ad latus He-
xagoni igitur GR. ad RP. ra-
tionem habet quam latus Quadrati ad latus Hexagoni,
15. huius. vt vero latus Quadrati ad latus Hexagoni ita BR. ad
RI. Vt igitur GR. ad RP. ita BR. ad RI. ſed & æqualis
eſt angulns ad verticem R. æquiangula igitur ſunt trian-
27. 1. gula GRP. BRI. atque adeo angulus PGR. æqualis an-
gulo IBR. id eſt RBM. parallelæ igitur ſunt PG. BI. &
6. 1. æqualis PB. ſeu BV ipſi PG. ergo & parallela VG. ipſi
33. 1 defin. 35. 1. BM. & parallelogrammum eſt BPGV. in quo ſe diametri
PV. BG. bifariam ſecant in H. eſt igitur BH. æqualis
HG. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

HInc conſtat punctum H. eſſe centrum circuli circa triangulum BIM. deſcripti, atque eumdem circulum tranſire per punctum G. Nam quod centrum circuli dicto triangulo circumſcripti ſit in recta GB. patet ex Corollario primæ tertij: Quod in puncto H. conſtat quia recta BG. diuiſa eſt bifariam in H, Quod circulus tranſeat per. G. eodem modo probatur quia ex propoſitione, HB. HG. ſunt æquales,

THEO-

THEOREMA XIX. PROPOS. XXII.

ISdem poſitis. Dico aggregatum BG. ex perpendiculari BF. ad baſim, & minori ſegmento FR. id eſt FG. ſeu diametrum circuli circũſcripti triangulo BIM. ad maius ſegmentum perpendicularis ad latus IR. rationem habere quam latus Quadrati ad latus Decagoni.

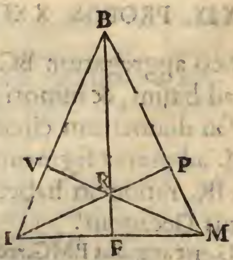
Nam ſi connectatur MG. erit angulus BMG. rectus; rectus autem eſt etiam MFG. Igitur vt BM. ad MF. id eſt latus quadrati ad latus Decagoni, ita BG. ad GM. id eſt BG. ad MR. 8. 6.
(nam cum duo triangula MFG. MFR. habeant duo latera 16. huius.
MFG. MFR. æqualia circa angulos rectos ad F. erunt baſes
MG. MR. æquales) Quod erat &c. 4. 1.

PROBLEMA IV. PROPOS. XXIII.

SVper data baſi triangulum Iſoſceles deſcribere, ex cuius angulis perpendiculares ſecent oppoſita latera, in quæ incidunt, proportionaliter.

SIT data in ſecunda figura baſis IM. ſuper qua oportet conſtituere triangulum Iſoſceles vt propoſitum eſt. Primo ſit constructum triangulum BIM. in prima figura, nulla data determinata linea, per 12. huius, in quo perpendiculares MV. IP. ſecent oppoſita latera proportionaliter, ſintq; delineata ea quæ 14. huius dicta ſunt. Hinc in ſecunda figura diuidatur IM. bifariam in F. & centro F. diſtantia FM. deſcriptus ſit circulus IXM. & fiat vt latus quadrati circulo inſcriptibilis ad latus decagoni ita IM. ad MP. quæ MP. in circulo aptetur ex puncto M. quæ producta ſecet ductam ad IM. perpendicularem FB. in B. (ſecabit autem eo 13. pron.
quod angulus BFM. & acutus FMB. minores ſint duobus

recti) & connectatur IB.ſecãs circulũ in V. itẽ m MV. IP. ſecantes ſe in R. per quod trã





Schol. 13. huius.

ſit & perpendicularis FB. Dico in ſecunda figura conſtitutũ eſſe ſuper baſi data IM. triangulum Iſoſceles IBM. in quo perpendiculares MV. IP. ſecant oppoſita latera BI. BM. proportionaliter. Cum enim triangula IMP. BMF. habeant
31. 3. angulum communem ad M. & rectos ad F.P. (eſt enim BF. perpendicularis ad IM. & IPM. in ſemicirculo rectus) erunt æquiangula: igitur vt IM. id eſt latus quadrati ad MP. id eſt latus decagoni, ita BM. latus quadrati ad MF. latus decagoni, ſed etiam eſt in prima figura BM. ad MF. vt latus
7. 6. quadrati ad latus Decagoni, & in vtroque angulus rectus
15. 5. BFM. ideoque reliquorum vterque minor recto: ſimilia igitur ſunt triangula FMB. atque adeo tota MBI. in vtraque figura. Sed & ſimiliter ſecta ſunt: Nam vt BM. ad MI. in prima, ita BM. ad MI. in ſecunda, vt modo oſtenſum eſt, & vt IM. ad MP. in prima, ita IM. ad MP. in ſecunda; igitur ex æquali vt BM. ad IM. in prima ita BM. ad IM. in ſecunda, ſed in prima ſecta eſt BM. proportionaliter in P. ergo & in ſecunda. Igitur ſuper data baſi &c. Quod erat faciendum.

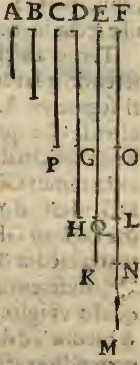
THEOREMA XX. PROPOS. XXIV.

SI ex additione alterna duarum linearum quarum prima ſit ſegmentum minus, altera ma-

ius

ius rectæ proportionaliter ſectæ ſex magnitudines ordine conſtituantur quæ ternæ ordine continuo coniugantur: prima & ſecunda coniugatio in medietate Geometrica; tertia in medietate quinta Geometricæ oppoſita; quarta in Harmonica proportionalitate conſiſtet.

Tria ſunt præcipua medietatum genera, teſte Pappo Alexandrino collectionum matheinaticarum libro. 3. prop. 16. Geometrica, Arithmetica, Muſica, quæ maxime vtiles ſunt ad antiquorum lectiones, quibus Nicomachus Pythagoreus & alij nonnulli tres addiderunt, recentiores adhuc quatuor alias: Geometrica medietas eſt cum tres quantitates eandem proportionem habent: Arithmetica, cum trium quantitatem eadem eſt differentia, de qua ſuperius plura. Harmonica quando tres numeri ita diſponuntur vt eadē ſit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter maiores duos, ad differentiam inter duos minores. medietas vero quinta ſeu Antigeometrica, vt alias omittamus, eſt cum vt tertius terminus ad ſecundum, ita primi exceſſus ad exceſſum ſecundi.



Sint igitur ſex lineæ rectæ quarum prima A. ſit minus ſegmentū rectæ proportionaliter ſectæ, ſecunda B. maius ſegmentum eiuſdem rectæ eodem modo ſectæ. tertia CP. conſtituatur ex maiori & minori ſegmento: Quarta DH. ex tertia & maiori ſegmento: quinta EK. ex quarta & minori ſegmento: ſexta FM. ex quinta & maiori ſegmento: Dico ſi coniugentur ordine continuo ternæ A. B. CP. & B. CP. DH. & CP. DH. EK. & DH. EK. FM. tres primas A. B.

CP. item tres ſecundas B. CP. DH. eſſe in medietate Geometrica: tres vero tertiæ coniugationis CP. DH. EK. eſſe in medietate Antigeometrica; denique tres vltimas DH. EK. FM. eſſe in proportionalitate Harmonica.

Primo cum recta CP. ſit compoſita ex minori ſegmento A. & maiori B. conſtat ex definit. 3. 6. eſſe vt A. ad B. ita B. ad CP. Quod eſt eſſe in proportionalitate Geometrica.

defin. 3. 6.

Secundo abſcindatur DG. æqualis ipſi CP. quoniam recta DH. conſtat ex recta CP. & ſegmento maiori B. erunt GH. & B. æquales, & diuiſa erit DH. in G. proportionaliter cuius maius ſegmentum DG. æquale ipſi CP. minus GH. Cum igitur B. ſit poſitum maius ſegmentum rectæ CP. & recta CP. maius ſegmentum ipſius DH. quarum vtraque proportionaliter ſecatur à dictis ſegmentis erit ex conuertente 2. 14 vt B. ad CP. ita CP. ad DH. ideoque tres illæ rectæ in medietate Geometrica conſtituuntur.

5. 13.

Tertio abſcindatur EQ. æqualis ipſi DH. erit QK. differentia ipſarum DH. DK. ex ſuppoſitione, æqualis minori ſegmento A. & GH. differentia duarum DH. CP. iam oſtenſa eſt æqualis maiori ſegmento B. & CP. DG. æquales ac DG. maius ſegmentum rectæ DH. proportionaliter ſectæ minus GH. vt igitur media HD. ad ſegmentum maius DG. id eſt ad minimam CP. ita DG. ſegmentum maius rectæ DH. ad GH. ſegmentum minus, ſed etiam GH. differentia mediæ & minimæ eſt ſegmento maiori B. & recta QK. differentia mediæ & maximæ ſegmento minoris A. æqualis vt igitur media ad minimam ita differentia minimæ & mediæ ad differentiã mediæ & maximæ. Erit igitur conuertendo vt tertius terminus CP. ad ſecundum DH. ita exceſſus primus QK. ad ſecundum GH. quæ definitio eſt medietatis quintæ apud Pappum.

defin. 3. 6.

Quarto ex FM. abſcindatur FN. æqualis ipſi EK. & FL. ipſi DH. & FO. ipſi DG. Quoniam LN. eſt æqualis ipſi QK. id eſt ipſi A. & NM. adiecta eſt æqualis ipſi B. erit tota LM. æqualis duabus A. B. id eſt toti CP. ſeu DG. maiori

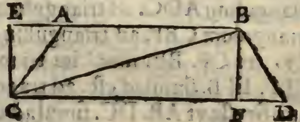
nem-

nempe ſegmento DH. proportionaliter ſectæ id eſt ipſi FO. ipſi autem DH. eſt æqualis FL. igitur etiam FL. ſecta eſt proportionaliter in O. cumque adiecta ſit LM. maiori ſegmento DG æqualis erit FM. ſecta in L. proportionaliter. 5. 13.
Patet igitur eſſe vt FM. totam ad FL. maius ſegmentum, id eſt ad DH. minus extremum ita differentiam maiorum NM. quæ eſt æqualis B. maiori ſegmento ad QK. differentiam minorum, æqualem minori ſegmento A. quæ eſt ratio Harmonica. Quare ſi ex additione alterna &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXV.

Trapezium habens duo latera parallela, diuiditur à linea recta per angulos oppoſitos ducta in duo triangula quæ inter ſe eandem rationem habent quam latera oppoſita parallela.

Sit trapezium ABDC. cuius latera AB. CD. parallela & angulos oppoſitos C.B. coniungat rectá CB. Dico eſſe vt AB. ad CD. ita triangulum BAC. ad triangulum BDC. producta enim recta BA. ſi



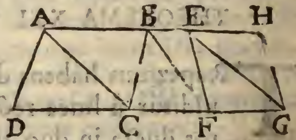
opus fuerit, aut alia ex parallelis ducatur ex C. ad CE. perpendicularis CE. item ex B. ad CD. perpendicularis BF. cū CE. BF. ſint parallelæ item BE. CF. erit ECFB. parallelogrammum: æqualia igitur latera oppoſita CE. FB. Triangulorum igitur BAC. BDC. æqualis eſt altitudo CE. BF. Eſt ergo vt baſis BA. ad baſim DC. ita triangulum BAC. ad triangulum BDC. Quod erat. 35. defin. 34. 1. 4. defin. 1. 6.

THEO-

THEOREMA XXII. PROP. XXVI.

Trapezia in eiſdem aut æqualiter diſtantibus parallelis ita ſe habent inter ſe, vt duo latera vnius parallela, ad duo latera parallela alterius.

Sint trapezia ABCD. BCFE. EFGH. inter eaſdem parallelas AH. DH. & diuidantur à lineis rectis DB. CE. FH. per angulos oppoſitos ductis in triangula, quæ (vt ſuperiori demonſtratur) eandem habent altitudinem. Dico eſſe vt AB. & DC. ſimul ad rectas BE. CF. ſimul ita trapezium ABCD. ad tragelium BCFE.



22. huius. Eſt enim vt recta AB. ad rectam DC. ita triangulum ABC. ad triangulum ADC. & componendo vt AB. DC. ſimul ad DC. ita ABC. ADC. triangula ſimul, id eſt, trapezium ABCD. ad triangulum ADC. & vt DC. ad CF. ita triangulum ADC. ad triangulum CBF. & vt CF. ad BE. ita triangulum CBF. ad triangulum EFB. & componendo vt CF. ad CF. BE. ſimul ita triangulum CEF. ad triangula CBF. EFB. ſimul id eſt, ad trapeziũ BCFE. cũ igitur oſtenſum ſit eſſe vt AB. DC. ſimul ad DC. ita trapezium ABCD. ad triangulum ADC. & vt DC. ad CF. ita trianguũ ADC. ad triangulum CBF. & vt CF. ad CF. BE. ſimul ita triangulum CBF. ad trapezium BCFE. erit ex æquo vt AB. DC. ſimul ad CF. BE. ſimul ita trapelium ABCD. ad trapezium BCFE.

18. 5.

1. 61.

4. huius.

18. 5.

22. 5.

Idem demonſtrabitur de trapezio EFGH. Quod erat &c.

COROL-

COROLLARIVM.

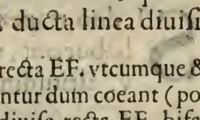
Ex demonſtratis ſuperiori propoſitione deducitur quod. Si Trapezium cuius duo latera parallela diuidantur linea ſecante vtrumque latus parallelum: erunt partes ablatæ inuicem, vt duo latera parallela vnius partis ad duo latera parallela alterius.

Si trapezium AEFD. cuius duo latera AE. DF. parallela quæ diuidantur recta BC. Dico eſſe vt AB. DC. ſimul ad AE. DF. ſimul ita pars ABCD. ad partem BEFC. Hoc euidenter patet ex propoſitione.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXVII.

SI in trapezio in quo duo latera parallela, a puncto in quo duo non parallela producta concurrunt ducatur recta, diuidens lineam rectam vtrumque latus parallelum ſecantem; habebunt trapezij partes eandem rationem, quam partes lateris vtriuſuis paralleli à ducta linea diuiſi.

Rurſus trapezium ABCD. ſecetur recta EF. vtcumque & DA. CB. latera non parallela producantur dum coeant (ponuntur enim non parallela) in H. & diuiſa recta EF. bifariam in K. ducatur recta HK. quæ producta ſecet latus DC. in G. & latus AB. in I. Dico eſſe vt AI. ad IB. aut DG. ad GC. ita partem AFED. ad partem EFBC. Cum enim parallelæ ſint AB. DC. eaſque ſecent EF. GI. rectæ; erit in triangulo KEG. angulus KEG. æqualis alterno KFI. in triangulo KFI. & angulus GKE. æqualis angulo FKI. ad verticē: ponitur autē FK. æqualis KE. æqualia igitur ſunt triangula KEG. KFI. Si igitur æquali- bus



10. 6.
29. 1.
15. 1.
26. 1.

trapezium altitudinem habet,quæ ſit illic FC.hic HM.Cum ergo duo triangula HKI. ACB. baſes AB. HI. æquales habeant,erunt inter ſe vt altitudines FC. HM. Item quia triangula ADC. HGK. baſes DC. GK.æquales habent erunt inter ſe vt altitudines FC. HM. ergo vt triangulum ACB. ad triangulum HKI. ita triangulum ADC. ad triangulum HGK.& permutando ac componendo & iterum permutando,vt trapezium ABCD. ad trapezium HIKG. ita triangulum ADC. ad triangulum HGK, eſt autem probatum eſſe triangulū ADC. ad triangulū HGK. vt eſt altitudo FC. ad altitudinem HM.igitur vt altitudo CF.ad altitudinem HM. ita trapezium ABCD. ad trapezium HIKG. Quod erat demonſtrandum.

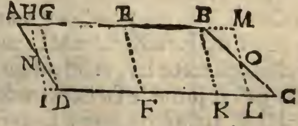
Schol.1.6.

11. 5.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXIX.

SI in trapezio habente duo latera parallela ſecto vtcumque recta linea tranſeunte per latera parallela abſcindantur minora latera ex maioribus,& reſiduorum medietas accipiatur: erit vt vnum ex minoribus lateribus cum medietate ſui exceſſus, ad alterum minus latus cum medietate eius exceſſus, ita pars trapezij ad partem.

Sit trapezium ABCD.cuius duo latera AB.DC. parallela, quod diuidatur vtcumque linea EF. vtrumque latus parallelum ſecante.Abſcindatur ex parte EA.maiori quam FD. recta EG. rectæ FD. æqualis, & reſiduum GA. diuidatur bifariam in H. & rectæ GD. ducatur parallela HI. ſecans AD.in N. occurrens rectæ FD.



productæ in I. Eodem modo ex FC. maiori latere quàm EB. abſcindatur rectæ EB. æqualis FK. & reſiduum KC. diuidatur bifariam in L. & rectæ BK. ducatur parallela LM. occurrens rectæ EB. productæ in M. ſecans BC. in O. erit AG. exceſſus quo EA. ſuperat FD. eiuſque medietas HD. ſeu ID. Item erit KC. exceſſus quo FC. ſuperat EB. eiuſque medietas KL. ſeu BM. Dico eſſe vt EM. ad EH. ſeu vt FL. ad FI. ita trapezium EBCF. ad trapezium EADF. ſunt enim tam GD. quam BK. parallelæ rectæ EF. Nam cum parallelæ ſint & æquales rectæ EG. FD. ex conſtructione, rectæ GD. EF. eas coniungentes parallelæ erunt & æquales.
33. 1. Eodem modo parallelæ erunt & æquales EF. BK. Rurſus
35. defin. 1. parallelogramma erunt tam HGDI. quam BKLM. quod ex conſtructione latera oppoſita habeant parallela. Et cum parallelogrammum GHID. & triangulum ADG. ſint in ijſdẽ parallelis AG. ID. & baſis AG. trianguli ADG. ſit dupla
Schol 41 1. baſis AH. parallelogrammi HGDI. erit triangulum ADG. æquale parallelogrammo HGDI. eodem modo oſtendetur triangulum BCL. æquale parallelogrammo BMLK. Rurſus erunt triangula BOM. LOC. æquiangula & æquilate-
15. 1. ra, nam anguli ad verticem O. æquales ſunt: item angulus
29. 1. MBO. æqualis angulo LCO. & BMO. angulo CLO. quod parallelæ ſint BM. LC. latus autẽ BM. æquale eſt lateri KL.
34. 1. quod parallelogrammum ſit BMLK. & latus KL. lateri LC.
1. pron. ex conſtructione, æqualia igitur latera BM. LC. & latera
26. 1. BO. OC. & MO. OL. & totum triangulum toti triangulo. Idem oſtendetur de triangulis ANH. IND. ſi igitur cõmuni figuræ rectilineæ EBOLF. addantur æqualia triangula
1. pron. 1. BOM. COL. erit parallelogrammum EMLF. æquale trapezio EBCF. recta enim ML. parallela rectæ BK. (quæ parallela eſt rectæ EF. vt oſtenſum eſt,) eſt etiam parallela re-
30. 1. ctæ EF. ac proinde facile oſtendetur eſſe parallelogrammũ EMLF. Item ſi communi figuræ rectilineæ EHKD. addan-
1. pron. 1. tur æqualia triangula ANH. DNI. erunt parallelogrammũ EHIF. & trapezium EADF. æqualia. Eſt autem vt LF. ad
1. 6. FI.

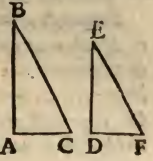
FI. id eſt ad EH. ita parallelogrammum EMLF. ad parallelogrammum EHIF. Igitur vt LF. ad FI. ita trapezium EBCF. ad trapezium EADF. Quod fuit probandum. 34. 1.

COROLLARIVM.

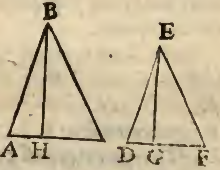
Eadem ſequentur ſi latera AB. & DC. bifariam diuidantur, & per puncta diuiſionum ducantur rectæ EF. parallelæ, vt ex demonſtratione conſtat.

LEMMA I.

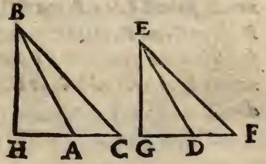
DVo triangula angulum angulo æqualem habentia, & circa angulos æquales latus vnum lateri æquale; rationem habent quam reliquum latus circa angulum æqualem ad reliquum latus.



Sint duo triangula ABC. DEF. quæ angulos A. D. æquales habeant, & latera AC. DF. æqualia. Dico eſſe vt AB. ad DE. ita triangulum ABC. ad triangulum DEF.



Sint primum triangula ABC. DEF. rectangula ad A. D. erunt AB. DE. eorum altitudines, cum igitur æquales ſint AC. DF. ex hypotheſi, erit vt AB. ad DE. ita triangulum ABC. ad triangulum DEF. 1. 6.



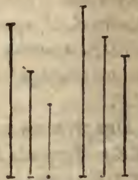
Sint ſecundo triangula ABC. DEF. obliquangula, & ducantur in latera æqualia, producta ſi opus fuerit, perpendiculares BH. EG. Quoniam æquales ponuntur anguli BAC. EDF. & recti

32. 1. 13. 1. *ſunt anguli ad HG. erunt in triangulis oxygonijs reliqui HBA. DEG. in amblygonijs BAN. EGD. æquales, quare triangula BHA. EGD. erunt æquiangula, eritque vt AB. ad BH. ita DE.*
1. 6. *ad EG. & permutando vt AB. ad DE. ita HB. ad EG. ſed vt HB. ad EG. ita triangulum ABC. ad triangulum DEF. (cum æquales ponantur AC. DF. & perpendiculares BH. EG. ſint illorum triangulorum altitudines) igitur vt AB. ad DE. ita triangulum ABC. ad triangulum DEF. Quod erat probandum.*

LEMMA. II.

SI *fuerit vt prima quantitas ad ſecundam ita tertia ad quartam & iterum prima ad quintam ſit vt tertia ad ſextam: erit prima ad ſecundam & quintam ſimul, vt tertia ad quartam & ſextam ſimul.*

Demonſtratum hoc eſt à Guido Vbaldo, è Marchionibus montis Mathematico longe clariſſimo, primo in Lemmatis ante 13. propoſitionem Archimedis de æqueponderantibus: hinc lib. 1. propoſitione 6. de Cochlea, quod nos hic ab eo mutuum ſumimus, vt facilius nonnullas ſequentes propoſitiones demonſtremus.



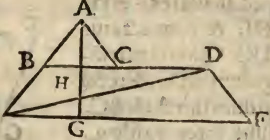
Sit vt A. ad E. ita C. ad F. & vt A. ad B. ita C. ad D. Dico A. ad EB. ſimul eſſe, vt C. ad FD. Quoniam enim eſt vt A. ad E. ita C. ad F. erit conuertendo vt E. ad A. ita F. ad C. ſed eſt vt A. ad B. ita C. ad D. ergo ex æquali vt E. ad B. ita F. ad D. quare componendo ſicut EB. ad B. ita FD. ad D. Quoniam autem eſt A ad B. ſicut C. ad F. erit conuertendo vt B. ad A. ita D. ad C. rurſus igitur ex æquali vt EB. ad A. ita FD. ad C. ac tandem conuertendo A. erit ad EB. vt C. ad FD. Quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXX.

SI triangulum ac trapezium duorum laterum parallelorum angulum vnum vni angulo æqualem habuerint, & vnum latus circa angulum æqualem vni lateri æquale: erit vt reliquũ latus trianguli circa angulum æqualem ad duo latera parallela trapezij, ita triangulum ad trapeziũ.

Habeant triangulum ABC. & trapezium BEFD. laterũ BD. EF. parallelorum angulos ad B. E. & latera AB. BE. æqualia. Dico eſſe vt BC. ad BD. EF. ſimul, ita triangulum ABC. ad trapezium BF. connectantur ED. Quoniam parallelæ ſunt BD. EF. erunt anguli BEF, id eſt ABD. & 29. 1.
EBD. æquales duobus rectis: quare vna recta eſt ABE. 14. 1.
(compoſitis videlicet AB. BE. & BC. BD.) Ducaturque perpendicularis AHG. ſecans BC. ac BD. in H. & EF. in G. Quoniam



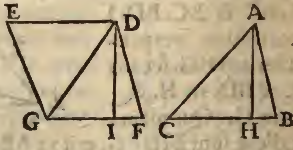
parallelæ ſunt BH. EG. erit vt AB. ad BE. ita AH. altitudo 2. 6.
trianguli ABC. ad HG. altitudinem triangulorum EBD. EDF. æquales autem ſunt ex hypotheſi AB. BE. æquales
igitur ſunt etiam AH. HG. erit igitur vt BC. ad BD. ita 1. 6.
triangulum ABC. ad triangulum EBD. Rurſus quia eandem habent altitudinem triangula ABC. EDF. erit vt BC. 1. 6.
ad EF. ita triangulum ABC. ad triangulum EDF. Cum igitur ſit vt BC. ad BD. ita triangulum ABC. ad triangulũ EBD. & vt BC. ad EF. ita triangulum ABC. ad triangulum EDF. erit, per Lemma 2. præcedens, vt BC. ad BD. EF. Lemma 2. præcedens.
ſimul ita triangulum ABC. ad duo triangula EBD. EDF. ſimul, id eſt ad totum trapezium BF. Quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXXI.

SI triangulum ac trapezium duorum laterum parallelorum angulum vnum vni angulo æqualem habuerint: erit vt rectangnlum comprehenſum ſub lateribus trianguli æqualem angulum comprehendentibus, ad rectangulum contentum ſub duobus lateribus trapezij parallelis tanquã vna linea recta, & latere tertio quod æquali angulo adiacet, ita triangulum ad trapezium.

Sit triangulum ABC. trapezium autem DEGF. habentia angulos ABC. DFG. æquales. Dico eſſe vt rectangulum ABC.ad rectangulum contentum DF.FG.ſimul & DF. ita triangulum ABC.ad trapezium DFGE. Ducantur perpendiculares AH. DI. & connectatur DG. Quoniam triãgulum ABC.& rectãgulum ſub AH. BC. ſunt inter eaſdem parallelas, ac ean-



41. 1. dem baſim habent BC. erit rectangulum ſub AH. & BC. trianguli ABC. duplum:eodem modo triangulum ſub FG. DI. duplum erit trianguli FDG. & rectangulum ſub DI. DE. duplum trianguli DGE. quare totum triangulum ſub DI.& FG.DE.duplum eſt trianguli vtriuſque FDG.DGE. id eſt totius trapezij DFGE. Hinc quoniam æquales ſunt anguli ABH. DFI. & recti ſunt anguli ad H. I. æquiangula
3. 6: ſunt triangula ABH. DFI. erit igitur vt BA. ad AH. ita (poſita communi altitudine BC.) rectangulum ſub AB. BC. ad rectangulum ſub AH: BC. & vt FD. ad DI. ita (poſita communi altitudine vtraque DE. FG.) rectangulum ſub FD. & DE. FG. ſimul ad rectangulum ſub DI. & DE. FG.

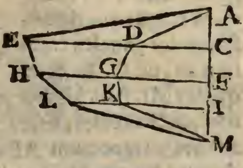
FG. ſimul. Quare vt rectangulum ſub AB. BC. ad rectangulum ſub AH. BC. ita rectangulum ſub FD. & DE. FG. ſimul, ad rectangulum ſub DI. & DE. FG. ſimul, & conſequentium dimidia, vt rectangulum ſub AB. BC. (quod oſtenſum eſt dimidium rectanguli ſub AH. BC.) ita rectangulum ſub FD. & DE. FG. ſimul ad trapezium DEFG. (quod etiam eſt dimidium rectanguli ſub DI. & DE. FG, ſimul) & permutando, vt rectangulum ſub AB. BC. ad rectangulum ſub DF. & DE. FG. ſimul, ita triangulum ABC. ad trapezium DEFG. Quod propoſitum fuit demonſtrare. 11. 5. 15. 5.

Demonſtratur hoc Theorema à Pappo. Lemm. 8. in 1. Conic. Apollonij.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXXII.

SInt parallelæ CE. FH. IL. quotcumque diſtantes æquali ſpatio ita vt ducta AM. ſecetur à parallelis in partes æquales CF. FI. ſintque ijſdem partibus æquales AC. IM. & ducantur AD. DG. GK. facientes rectilineum quinque laterum ADGKI. Dico triangulum AC. ad totum rectilineum ADGKI. eſſe vt rectam CD. ad rectam CD. bis, ad FG. bis & rectam IK. ſemel.

Vt enim CD. ad CD. ita triangulum ACD. ad ſeipſum; Rurſus vt CD. ad CD. & FG. ſimul ita triangulum ACD. ad trapezium CG. ergo vt CD. ad CD. & CD. FG. ita triangulum ACD. ad triangulum ACD. & trapezium CG. Rurſus quia eſt vt CD. ad CD. & CD. FG. ita triangulum 30. huius. Lemma 2. ante. 30. huius.



ACD.

ACD. ad triangulum ACD. & trapezium CG. item eſt vt CD. ad FG. IK. ita triangulum ACD. ad trapezium FK. erit vt CD. ad CD. & CD. FG. & FG. IK. id eſt ad CD. bis FG. bis IK. ſemel, ita triangulum ACD. ad triangulum ACD. ac trapezia CG. FK. id eſt ad totum rectilineum ADGKI. Quod erat demonſtrandum.

Lemma 2. ante. 30. huius.

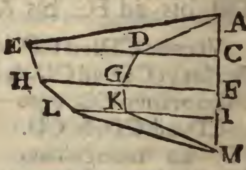
Idem continget ſi ſit plurium laterum, ſemper enim quæ proportio CD. ad omnia latera duplicata præter vltimum, quod ponitur ſimplex ita triangulum ACD. ad omnia trapezia quæ componunt trapezium pluri laterum.

THEOREMA XXIX. PROP. XXXIII.

Retentis ijs quæ ſuperiori propoſitione poſita ſunt: ducatur etiam KM. ita vt ſit rectilineum quinque laterum incipiens à triangulo ACD. & deſinens in triangulum KMI. ſintque anguli ad C. I. æquales. Dico eſſe vt CD. ad omnia latera duplicata, nempe ad CD. bis FG. bis IK. bis, ita triangulum ACD. ad totum rectilineum ADGKM.

Vt enim CD. ad CD. bis FG. bis IK. ſemel ita triangulum ACD. ad totum rectilineum ADGKI. Itẽ vt CD. ad IK. ita triangulum ACD. ad triangulum IKM. (vt lemmate 1. ante 30. demõſtrauimus ęquales enim ſunt anguli C. I. & æquales MI. AC.) igitur vt CD. ad CD. bis, FG. bis IK. ſemel, & IK. ſemel, ſeu etiam IK. bis ita triangulum ACD. ad totum trapezium ADGKM. Quod erat probandum. Atque idem omnino probatum in pluribus lateribus.

32. huius.

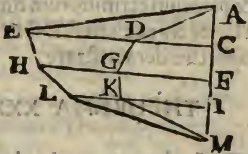


THEO-

THEOREMA XXX. PROPOS. XXXIV.

PRæter ea quæ præcedenti propoſitione ſuppoſuimus, ſit aliud trapezium AEHLI. maius priori, illudque continens.

Dico quod erit vt CD. bis FG. bis & IK. ſemel ad CE. bis FH. bis IL. ſemel, ita trapezium ADGKI. ad trapezium AEHLI. Quoniam enim paulo ante demonſtratum eſt, eſſe vt CD. ad CD. bis, FH. bis IK. ſemel, ita triangulum ACD. ad trapeziũ ADGKI. erit conuertendo vt CD. bis FH. bis IK. ſemel ad CD. ita trapeziũ ADGKI. ad triangulum ACD. 32. huius.

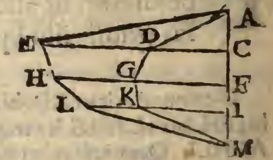


vt vero CD. ad CE. bis FH. bis & IL. ſemel, ita triangulum ACD. ad totum trapezium AEHLI. (hoc enim ex ſuperioribus Lemmatis & 31. huius aperte ſequitur, aut modo quo in 31. huius vſi ſumus deducitur) erit igitur ex æqualitate vt CD. bis, FH. bis, IL. ſemel, ita trapezium ADGKI. ad trapezium AEHLI. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXV.

SInt eadem quæ in ſchemate ſuperioris propoſitionis, & ducatur præterea LM. ſintque anguli ad C. I. æquales. Dico eſſe vt compoſitam ex CD. FG. IK. ad compoſitam ex CE. FH. IL. ita trapeziũ ADGKM. ad trapezium AEHLM.

33. huius. Vt enim CD. ad CD. bis, FG. bis IK. bis ita triangulum ACD. ad trapezium ADGKM. & conuertendo. Item vt CE. ad CE. bis FH. bis IL. bis ita triangulum ACE. ad trapezium AEHLM. ex 33. huius; & conuertendo: erit igitur ex æquali vt CD. bis, FG. bis, & IK. bis, ad CE. bis, FH. bis, IL. bis ita trapezium ADGKM. ad trapezim AEHLM.

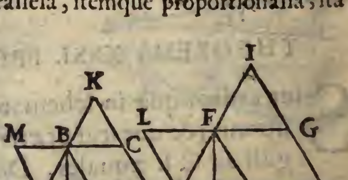


15. 5. & priorum terminorum dimidia vt CD. FG. IK. ad CE. FH. IL. ita trapezium ADGKM. ad trapezium AEHLM. Quod oportuit demonſtrare.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXVI.

SI duo trapezia duo latera parallela proportionalia habuerint: erunt inter ſe vt rectangula ſub quouis laterum parallelorum proportionalium, & altitudine trapeziorum comprehenſa.

Sint duo trapezia ABCD. EFGH. quorum latera BC. AD. item FG. EH. parallela, itemque proportionalia; ita vt ſit AD. ad EH. vt BC. ad FG. ſintque altitudines trapeziorum perpendiculares ad vtrumq; latus trapezij BP. FQ. Dico eſſe vt rectangulum ſub CB. BP. ad rectangulum ſub GF. FQ. aut vt rectangulū ſub DA. BP. ad rectangulum



ſub

ſub HE. FQ. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Ducatur ipſi KD. parallela BN. & ipſi IH. parallela FO. Item ipſi KD. parallela AM. & ipſi IH. parallela EL. occurrentes lateribus parallelis trapezij productis ſi opus fuerit, illæ in punctis N. M. iſtæ in O. L.

Quoniam in triangulis KAD. IEH. latetibus AD. EH. parallelæ ſunt BC. FG. ex hypotheſi; erunt triangula KAD. KBC. inter ſe; item IEH. IFG. inter ſe ſimilia. Corol.4.6. Rurſus quia eſt vt AD. ad EH. ita BC. ad FG. erit permutando vt AD. ad BC. ita EH. ad FG. Cum ergo ſuper duabus AD. BC. ſint conſtituta duo triangula ſimilia AKD. BKC. & ſuper duabus EH. FG. duo itidem ſimilia EIH. FIG. erit vt triangulum AKD. ad triangulum BKC. ita triangulum EIH. ad triangulum FIG. & permutando. 22. 6. Quare cum ſit vt totum triangulum AKD. ad totum EIH. ita pars BKC. ad partem FIG. & reliquum trapezium ABCD. ad reliquum trapeziũ EFGH. erit vt totum AKD. ad totum EIH. 19. 5. Inſuper cum in triangulis AKD. EIH. ductæ ſint ad latera KD. IH. parallelæ BN. FO. erunt triangula KAD. BAN. item IEH. FEO. ſimilia; Corol.4.6. item cum ſit vt AK. ad KB. ita AD. ad BC. & vt AD. ad BC ita EH. ad FG. ex hypotheſi, & vt EH. ad FG. ita EI. ad IF. 4. 6. erit vt AK. ad KB. ita EI. ad IF. & per conuerſionem rationis vt AK. ad AB. ita EI. ad EF. Quare cum ſuper duabus AK. AB. & ſuper duabus EI. EF. conſtituta ſint illic duo triangula ſimilia KAD. BAN. iſtic IEH. FEO. ſimilia; erit vt triangulum KAD. ad triangulum BAN ita triangulum IEH. ad triangulum FEO. & permutando vt triangulum KAD. ad triangulum IEH. ita triangulum BAN. ad triangulum FEO. 22. 6. eſt autem trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. vt triangulum KAD. ad triangulum IEH. ergo etiam erit trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. vt triangulum BAN. ad triangulum FEO. & permutando. Quare cum ſit vt totum trapezium ABCD. ad totum trapezium EFGH. ita pars BAN. ad partem FEO. & reliquum parallelogrammum BCDN. ad re- 19 5.

liquum parallelogrammum FGHO. erit vt totum trapeziũ
35. 1. ABCD. ad totum trapezium EFGH. at parallelogrammo
BCDN. æquale eſt parallelogrammum ſub CB. BP. & parallelogrammo FGHO. æquale eſt parallelogrammum ſub
GF. FG. erit ergo vt rectangulum ſub CP. BP. ad rectangulum ſub GF. FG. ita trapezium ABCD. ad trapezium
EFGH. Denique cum ſit vt AD. ad DN. ita AK. ad KB.
2. 6. (quod poſitæ ſint parallelæ BN. KD.) & vt AK. ad KB. ita
oſtenſum eſt ſupra EI. ad IF. & vt EI. ad IF. ita EH. ad HO.
(ob parallelas poſitas FO. IH.) erit vt AD. ad DN. ita EH.
ad HO. ſed vt AD. ad DN. ita parallelogrammum MADC.
ad parallelogrammum BCDN. & vt EH. ad HO. ita paral-
1. 6. lelogrammum LEHG. ad parallelogrammum FGHO. vt
igitur parallelogrammum MADC. ad parallelogrammnm
BCDN. ita parallelogrãmũ LEHG. ad parallelogrammũ
FGHO. & conuertendo ac permutando, vt parallelogrammum BCDN. ad parallelogrammum FGHO. ita parallelogrammum MADC. ad parallelogrammum LEHG. Eſt
autem oſtenſum paulo ante eſſe vt parallelogrammum
BCDN. ad parallelogrammum FGHO. ita trapezium
ABCD. ad trapezium EFGH. ergo vt parallelogrammum
MADC. ad parallelogrammum LEHG. ita trapezium
ABCD. ad trapezium EFGH. ſed parallelogrammo
35. 1. MADC. eſt æquale parallelogrammum ſub DA. BP. & parallelogrammo LEHG. æquale parallelogrammum ſub
HE. FQ. vt igitur rectangulum ſub DA. BP. ad rectangulum ſub HE. FQ. ita trapezium ABCD. ad trapezium
EFGH. Igitur ſi duo trapezia &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM. I.

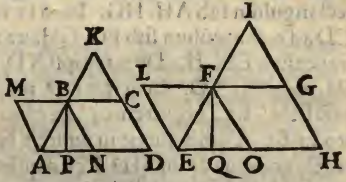
Colligitur ex probatis in propoſitione trapezia ABCD. EFGH. eſſe vt triangula AKD. EIH. quæ ex lateribus non parallelis in vnum punctum productis, & vno laterum parallelorum fiunt: item eadem eſſe vt parallelogramma, quæ vtro-

vtrouis laterum parallelorum, & vtrouis non parallelorum; conſtant. demonſtratum enim eſt eſſe vt parallelogrammum BCDN. ad parallelogrammum FGHO. & vt parallelogrammum CDAM. ad parallelogrammum GHEL. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. idemque ſequetur ſi ſumantur parallelogramma ſub CB. BA. & DA. AB. aut ſub GF. FE. & HE. EF. vt inducenti manifeſtum eſt. Denique eſſe vt triangulum BAN. ad triangulum FEO. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. hæc enim omnia ex progreſſu demonſtrationis manifeſta ſunt.

THEOREMA XXXIII. PROP. XXXVII.

TRapezia quorum duo latera parallela, & vtrumque vtriq; proportionalia; habent rationem eam quæ componitur ex proportione laterum homologorum & proportione altitudinum.

Sint, vt in ſuperiori, duo trapezia ABCD. EFGH. quorum latera BC. AD. item FG. EH. parallela, itemque proportionalia; ita vt ſit AD. ad EH. vt BC. ad FG. ſintque altitudines trapeziorum perpendiculares ad vtrumque latus trapezij BP. FQ. Dico rationem trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. eſſe compoſitam ex ratione AD. ad EH. & ex ratione BP. ad FQ. aut ex ratione BC. ad FG. & ratione BP. ad FQ. Vt enim trapezium ABCD. ad trapezium CDEF. ita rectangulum ſub DA. BP. ad rectangulum ſub EH. FQ. & rectangulum ſub CB. BP. ad rectangulum GF. FQ.



ex præcedenti.

23. 6. FQ. illorum vero rectangulorum ratio compoſita eſt ex rationibus AD. ad EH. & BP. ad FQ. aut ex rationibus BC. ad FG. & BP. ad FQ. Igitur ratio trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. compoſita eſt ex rationibus AD. ad EH. & BP. ad FQ. aut ex rationibus BC. ad FG. & BP. ad FQ. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXVIII.

TRapezia quæ duo latera parallela, eademque proportionalia, & angulum angulo æqualem habent ſunt vt rectangula ſub lateribus homologis, & lateribus non parallelis quæ æqualem angulum continent, comprehenſa.

SINT vt in ſchemate penultimæ huius duo trapezia ABCD. EFGH. quorum latera BC. AD. item FG. EH. parallela, itemque proportionalia, ita vt ſit AD. ad EH. vt BC. ad FG. ſintque præterea anguli ad D. H. ideoque etiam
29. 1. anguli ad G. C. Dico eſſe vt rectangulum ſub AD. DC. ad rectangulum ſub AH. HG. Item vt rectangulum ſub BC. CD ad rectangulum ſub FG. GH. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Ducatur ipſi KD. parallela BN. & ipſi IH. parallela FO. Item ipſi KD. parallela AM. & ipſi IH. parallela EL. occurrentes lateribus parallelis trapezij productis ſi opus fuerit in punctis N. M. & O. L. parallelogramma erunt MD. LH. æquiangula ob angulos æquales D. H. Item parallelogramma æquiangula erunt BD. FH. ob æquales angulos ad C. G. erit igitur, ex his quæ demonſtrauit Pappus lib. 7. Mathemat. Collectionum pro-
Schol. 23. 6. poſit. 172. & ab eo Clauius Schol. in 23. 6. propoſit. 5. vt rectangulum ſub AD. DC. ad rectangulum ſub EH. HG. ita parallelogrammum MD. ad parallelogrammum LH. & vt rectangulum ſub BC. CD. ad rectangulum ſub FG. GH. ita

ita parallelogrammum BD. ad parallelogrammum FH. ſed vt parallelogramum MD. ad parallelogrammum LH. & vt parallelogrammum BD. ad parallelogrammum FH. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Igitur vt rectangulum ſub AD. DC. ad rectangulum ſub EH. HG. & vt rectangulum ſub BC. CD. ad rectangulum ſub FG. GH. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. Quod propoſitũ erat demonſtrare. Corol. 37. huius.

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXIX.

TRapezia quæ duo latera parallela, eademque proportionalia, & angulum angulo æqualem habent; ſunt in ratione compoſita ex ratione laterum homologorum, & ratione laterum circa angulum æqualem: item ex ratione laterum non parallelorum angulis æqualibus adiacentium, & ex ratione exceſſuum laterum parallelorum.

Sint eadem omnia quæ ſuperiori. Dico primo rationem trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. eſſe compoſitam ex ratione AD. ad EH. & CD. ad GH. Item ex ratione BC. ad FG. & CD. ad GH. ratio enim parallelogrammi MD. ad parallelogrammum LH. compoſita eſt ex rationibus AD. 23. 6. ad EH. & DC. ad HG. Item ratio parallelogrammi BD. ad FH. compoſita eſt ex rationibus BC. ad FG. & CD. ad GH. Vt autem parallelogrammum MD. ad parallelogrammum Corol. 37. huius. LH. & vt parallelogrammum BD. ad parallelogrammum FH. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. igitur ratio trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. compoſita eſt ex rationibus AD. ad EH. & CD. ad GH. Itemque ex rationibus BC. ad FG. & CD. ad GH.

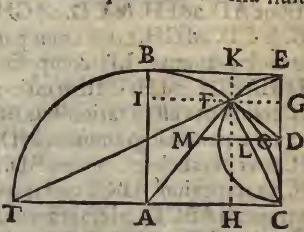
Sint

Sint ſecundo anguli ad A. E. æquales. Conſtat AN. eſſe exceſſum quo latus AD. alterum parallelum BC.ſuperat,
34. 1. cum in parallelogrammo BD. æqualia ſint aduerſa latera ND. BC. eodem modo EO. exceſſus eſt quo EH. ſuperat FG. & latera BA. FE. latera ſunt in ſuis trapezijs oppoſitis CD. GH. non parallela, angulis æqualibus A. E. adiacentia. Dico rationem trapezij ABCD. ad trapezium EFGH.
Schol.in 23. 6.propoſit.1. componi ex rationibus AB. ad FE. & AN. ad EO. Cum enim triangula BAN. FEO. æquales habeant angulos ad A. E. habebunt rationem compoſitam ex rationibus BA. ad
Corol. 37. huius. FE. & AN. ad EO. Vt autem triangulum BAN. ad triangulum FEO. ita trapezium ABCD. ad trapezium EFGH. igitur trapezij ABCD. ad trapezium EFGH. ratio componitur ex rationibus AB. ad EF. & AN. ad EO. Quod ſecundo loco propoſitum erat: igitur trapezia quæ duo latera parallela &c. Quod oportebat demonſtrare.

THEOREMA XXXVI. PROPOS. XL.

SI circa duas perpendiculares quarum altera alterius ſit dupla circuli deſcribantur; rectæ ex centris ad puncta ſectionis ductæ efficiunt angulum rectum.

Perpendiculares ſint TC. CE. ad punctum E. illa huius dupla, & ex A. D. centris, quæ diuidunt rectas TC. CE. bifariam, duo circuli ſecent ſe in F. & ducãtur DF. AF. Dico tam angulum ACD. quam AFD. eſſe rectum. Quoad angulum ACD. id conſtat ex deſcriptione. Ducatur DM.



pa-

parallela ipſi CT. ſecans circulū EFC. in L. & rectam AF. in M. & ducatur ad CI. perpendicularis AB. Item connectantur chordæ TF. FC. FE. Quoniam anguli TFC. EFC. ſunt in ſemicirculis, recti ſunt: Vna igitur recta eſt TFE. Vt 31. 3.
ergo TF. ad FC. ita FC. ad FE. Quare ſimiles ſunt arcus 14. 1. 8. 6.
maioris ac minoris circuli nimirum FBT. ipſi FLC. & FC. lemma. 5.
ipſi FE. æquales igitur anguli FAC. FDE. Quoniam autem lib. 1. Aſtrolabij clauij.
recti ſunt EDM. CAB. ex deſcriptione, ideoque æquales demptis æqualibus FAC. FDE. remanent æquales FDM. FAB. ſed & æquales ſunt FMD. FAC. (cum enim ex deſcri- 29. 1.
ptione duo anguli ACD. MDC. ſint recti erunt MD. AC. 28. 1.
parallellæ) æquales igitur ſunt duo anguli FDM. FMD. duobus FAB. FAC. id eſt recto BAC. Quare & rectus eſt 32. 1.
reliquus DFM. Quod probandum fuerat.

COROLLARIVM. I.

Hinc conſtat tam rectam AE. tangere circulum EFC. in F. quam rectam DF. circulum CFT. in eodem puncto F. Nam quoniam diametri ſunt AF. DF. & angulus rectus AFD. tam recta AF. cadet extra circulum EFC. quam recta 16. 3.
DG. extra circulum CFT. Quare dictos circulos tangent.

COROLLARIVM. II.

Rurſus manifeſtum eſt tam chordam TF. chordæ FC. quam chordam FC. ipſius FE. eſſe duplam. Nam vt TC. 8. 6.
ad CE. ita TF. ad FC. & FC ad FE. ſed ex hypotheſi dupla eſt TC. ipſius CE. igitur & dupla eſt TF. ipſius FC. & FC. ipſius FE.

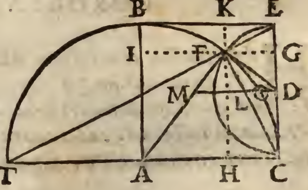
COROLLARIVM III.

Denique probatum eſt arcus FBT. FLC. item FBC. FE. & FB. FL. eſſe ſimiles, vt ex progreſſu demonſtrationis apertum eſt.

PROBLEMA V. PROPOS. XLI.

QVadrantem in duos arcus inæquales ita diuidere vt ſinus verſus minoris arcus, ſinus verſus maioris, ſinus rectus minoris, ſinus rectus maioris, ac ſinus totus proporcionem Arithmeticam continuam ab vnitate incipientem & vnitate differentem habeant.

Ducantur duæ perpendiculares CT. CE. ad punctum C. quarum illa huius ſit dupla quibus diuiſis bifariam in A. D. centris A. D. deſcripti circuli ſecent ſe in F. & ducta AB. perpendicularis ad CT. auferat Quadrantem BC. Dico Quadrantem BC. ſectum eſſe in F. vt proponebatur. Ducantur ſinus recti FI. FH. ille minoris, hic maioris arcus: Item continuetur IF. in G. erit FG. ſinus rectus arcus EF. & connectatur EB. quæ vtrumque



16. 3. circulum tanget in E. B. eritque AE. quadratum, & omnes figuræ quadrilateræ interius deſcriptæ erunt parallelogrãma rectangula. Cum igitur ſimiles ſint arcus FE. FOC. erit vt TC. ad CE. ita ſinus rectus HF. arcus FOC. ad ſinum rectum FG. arcus FE. ſed TC. ipſius CE. dupla eſt ex hypotheſi, igitur HF. ipſius FG. id eſt HC. illi æqualis, duplus eſt, ſed & CH. ſinus verſus arcus FOC. duplus eſt rectæ GE. ſinus verſi arcus FE. id eſt ipſius BI. ſeu FK. (producta HF. in K.) eſt igitur EG. ad CH. vt 1. ad 2. & CH. ad HF. vt 2. ad 4. ipſi autem HF. ſi addatur FK. id eſt EG. erit tota HK. id eſt CE. ſeu AC. ſinus totus quinque partes, & CA. id eſt

(Marginal notes: Corol. 3. præced. Lem. 5. lib. 1. Aſtrolab. Clauius. — 34. 1. Lemma idem)

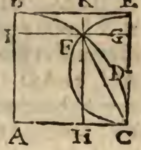
id eſt IG. ſi dematur CH. id eſt GF. duæ partes remanebit FI. trium partium. Igitur BI. eſt vnius partis CH. duarum FI. trium FH. quatuor AC. ſeu AB. quinque. Eſt autem IB. ſinus verſus arcus FB. CH. ſinus verſus arcus FOC. FI. ſinus rectus arcus FB. FH. ſinus rectus arcus FOC. & AC. ſinus totus. Igitur factum eſt quod proponebatur.

SCHOLIVM.

Ex hac propoſitione quam plurima problemata abſolui poſſunt, tot ſcilicet quot connexiones, ſeu coniugationes horum numerorum 1. 2. 3. 4. 5. quibus ſingulæ lineæ BI. CH. FI. FH. AC. reſpondent, fieri poſſunt. Nam Quadrantis ABC. arcus CB. in F. ita ſecatur vt

1 BI. cum CH. ſint æquales ipſi FI.

2 BI. cum FI. ſint æquales ipſi FH.



3 BI. cum FI. ipſius CH. & CH. cum FH. ipſius FI. & FI. cum AC. ipſius FH. & BI. cum AC. ipſius FI. ſint duplæ.

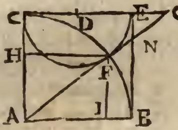
4 AF. cum FH. ipſius FI. triplæ, & ipſius BI. noncuplæ exiſtant, atque huiuſmodi alia problemata formari poſſunt. Ex regulis enim combinationum inter quinque res ad 500. poſſunt fieri diuerſæ compoſitiones, quæ ſingulæ ſingulis problematis materiam præbent, vt inducenti aperte conſtat.

Poſſet etiam problema proponi hoc modo. Intra Quadratum punctum deſignare in quo duæ lateribus quadrati parallelæ ſeſe inteſecantes, & in dicta latera terminatæ in quatuor ſegmenta ita diuidantur vt ea cum tota habeant proportionem Arithmeticam continuam ab vnitate incipientem, & vnitate differentem. Nam ſi intra quadratum ABEC. deſcribatur Quadrans ABC. & ſemicirculus EFC. ſeſe in F. ſecantes, & ducantur GFI, KFH. lateribus quadrati parallelæ, habebunt rectæ KF. FG. FN. FH. KH. proportionem continuam quam 1. 2. 3. 4. 5. vt ex demonſtratione ſuperiori apparet.

PROBLEMA VI. PROPOS. XLII.

QVadrantem ita diuidere vt ſecans arcus maioris cum tangente ſit tripla ſinus totius, & ſecans minoris arcus cum tangente ſit dupla ſinus totius.

Fiat eadem conſtructio quæ ſuperiori problemate, & præterea producatur AF. dum rectam BE. ſecet in N. & CE. productam in O. erit BN. tangent arcus minoris BF. & AN. eius ſecans: item erit CO. tangens arcus maioris FC. & AO. ſecans eiuſdem arcus. Dico AO. OC. ſimul eſſe triplam AC. & AN. NB. ſimul duplam eiuſdem AC. ſimilia enim ſunt triangula AHF. ACO. Item AIF. ABN. quare & latera proportionalia habent. ideoque vt ſunt FA. FH. ſimul ad AH. ita AO. OC. ſimul ad CA. at FA. FH. ad AH. rationem habent quam 9. ad 3. id eſt quam 3. ad 1. Igitur AO. OC. ſimul ad CA. rationem habent quam 3. ad 1. Eodem modo oſtendemus cum AF. FI. ipſius IA. ſint duplæ ex præcedenti, etiam AN. NB. ipſius AB. eſſe duplas. Quare quadrantem ita diuiſimus &c. Quod erat faciendum.



propoſit. præcedenti.

COROLLARIVM.

MAnifeſtum eſt ex hactenus demonſtratis ſinum totum AC. tangentem CO. & ſecantem AO. eſſe in proportione Arithmetica quæ eſt in his numeris 3. 4. 5. ſunt enim ob ſimilitudinem triangulorum AHF. ACO. tres rectæ AC. CO. AO. tribus AH. HF. AF. proportionales, iſtæ vero habent rationem, Arithmeticam dictorum numerorum, eandem igitur habent & illæ.

3. huius.

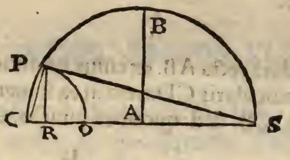
Eodem modo probatur tres AB. BN. AN. eſſe vt hos numeros

meros 4. 3. 5. quod hanc rationem habeant tres illis proportionales recta AI. IF. AF. Quare ſeptem lineæ BI. CH. FI. FH. AC. CO. OA. erunt in continua proportione iſtorum numerorum 3. 6. 9. 12. 15. 20. 25.

PROBLEMA VII. PROPOS. XLIII.

QVadrantem ita diuidere vt ſinus verſus arcus ſit octaua pars ſinus totius.

Sit quadrans ABC. in quo ſumatur chorda CP. æqualis medietati ſinus totius CA. & demittatur in CA. perpendicularis PR. id eſt ſinus rectus arcus PC. cuius ſinus verſus CR. Dico CR. eſſe octauam partem ipſius AC. Perficiatur ſemicirculus CBS. & connectatur SP. Quoniam angulus SPC. rectus eſt, vt & angulus PRC. erit vt SC. ad CP. ita PC. ad CR. eſt autem CP. ex hypotheſi medietas ſemidiametri CA. atque adeo quarta pars totius diametri SA. Igitur etiam CR. eſt quarta pars ipſius CP. ideoque ipſius CA. octaua pars. Quare quadrantem ita diuiſimus &c. Quod facere oportebat. 31. 3. 8. 6.



COROLLARIVM.

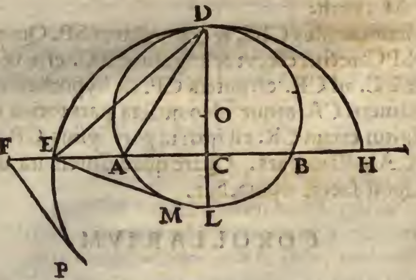
H*Inc conſtat ſi chorda ſit ſinus totius dimidia pars, ſinum verſum eſſe octauam partem eiuſdem ſinus totius.*

THEO-

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XLIV.

SI à puncto rectæ datæ, in quod recta perpendicularis incidit duæ rectæ æquales hinc inde accipiantur, & ad cuiuſuis extremum ex quouis perpendicularis puncto ducatur ſubtendens angulum rectum, ac ſubtendenti æqualis in data recta ex puncto incidentiæ accipiatur: erit rectangulum ſub tota accepta vna cum exceſſu ſubtendentis, & dicto exceſſu comprænhenſum æquale quadrato perpendicularis inter punctum in ea acceptum, & punctum incidentiæ comprehenſæ.

Sit data recta AB. ex cuius quolibet puncto C. ducatur perpendicularis CD. item in ea ſumantur duę partes æquales CA. CB. & à quolibet puncto C. in perpendicula-



ri ſumpto ducatur ſubtendens DA. ipſique DA. ex C. æqualis CE. Dico rectangulum BEA. quadrato DC. eſſe æquale. Quoniam recta BA. diuiſa eſt bifariam in C. eique

que adiecta eſt recta AE. erit rectangulum BEA. vna cum quadrato AC. æquale quadrato CE. hoc eſt quadrato DA. 6. 5.
(æquales enim ponuntur CE. DA.) eſt autem quadratum 47. 1.
DA. æquale quadratis DC. CA. igitur rectangulum BEA. vna cum quadrato AC. eſt æquale quadratis AC. CD. Quare ablato communi quadrato AC. remanebit rectangulum BEA. æquale quadrato CD. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

QVod ſi ſumatur ipſi CE. æqualis CH. & ſubtendenti DE. æqualis CF. erit rurſus rectangulum HFE. quadrato DC. æquale, ideoque rectangula BEA. HFE. inter ſe æqualia. Idemque continget ſi plures rectæ hoc modo accipiantur.

THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XLV.

IIſdem poſitis: ſi per tria puncta ADB. tranſeat circulus ADB. & producatur DC. per centrum O. in circunferentiæ punctum L. Dico rectangulum AEB. ad quadratum AC. eſſe vt rectam DC. ad rectam CL.

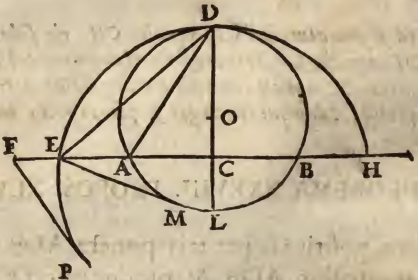
Rectangulum enim DCL. rectangulo ACB. id eſt quadrato AC. æquale eſt (ponitur enim AB. bifariam diuiſa in C.) poſita autem communi altitudine DC. erit quadra- 35. 3.
tum DC. ad rectangulum DCL. id eſt, ad quadratum AC. 1. 6.
vt recta DC. ad rectam CL. ſed quadratum DC. oſtenſum eſt in ſuperiori propoſitione æquale rectangulo AEB. Igitur vt rectangulum AEB. ad quadratum AC. ita recta DC. ad rectam CL. Quod fuit demonſtrandum. 38. huius.

THEO-

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XLVI.

PONantur adhuc ea omnia quæ ſuperiori propoſitione & rectæ CD. ducatur ad circulum æqualis EM. Dico à recta EM. circulum tangi in puncto M.

44. huius. Quoniam rectangulum BEA. æquale eſt quadrato DC.
1. pron. & quadrato DC. ponitur æquale quadratum EM. erit qua-



dratum EM. rectangulo BEA. æquale, igitur recta EM.
37. 3. circulum tanget in M. Quod erat probandum.

COROLLARIVM.

QVod ſi ſumantur CE. CH. ipſi DA. & CF. ipſis DE. æquales ac per E. D. H. deſcribatur circulus, accipiaturque ipſi DC. æqualis FP. quæ ex puncto F. in circulum ducatur, ea ob eandem demonſtrationem circulum tanget in P. & quia vtrumque quadratum EM. FP. quadrato DC. æquale eſt; erunt quadrata EM. FC. id eſt recta EM. FP. æquales.

FINIS LIBRI IV.

CVRVI

CVRVI AC RECTI
Proportio promota.
LIBER QVINTVS.

QVANTI Mathematicas diſciplinas fecerit
magnus ille Academiæ moderator Plato, ne-
minem ignorare arbitror qui vel in admodum
vulgata hiſtoria mediocriter ſit verſatus. Cer- Aulus Gel-
tè vt ante ipſum Pythagoras neminem in ſubli- lius lib. 1. c.
miorem Philoſophorum claſſem admittebat, qui 9.
prius in ſolida illa ſeptem annorum ἐχεμυθίᾳ μα-
θηματικὸς τὰ μαθήματα, ac Geometriam præ- Τρεῖς.
ſertim, Arithmeticam, Harmonicamq; non excoluiſſet, ita iſte om- Adag. chil. 3.centur. 3.
nes Geometriæ ignaros Academiæ ingreſſu arcebat inſcripto foribus
edicto ne quis ἀγεωμέτρητος ingrederetur; neq; verò iam ingreſſos ab
eius exercitatione feriari ſinebat, ſed ſingulis diebus Geometricum Philoponus.
problema proponebat, vt nimirum animam ex numeris ac figuris ve-
luti concinnatam ſui ſimilibus exerceret, ac modo ad infinitas omniſq;
interualli ac diuiſionis expertes formas quibus diuinam mentem γεω- Plutarchus
μετρεῖν haud ignorabat cogitationem erigeret: modo ad vniuerſi iucun- Sympoſ.lib. 8.q.2.
dum ſpectaculum, quod totum pulcherrimis rationibus atq; aptis pro- Plato in Ti-
portionibus colligatum eſt, deduceret; deniq; quòd maxime ſpectabat, mæo.

Ll figuras

figuras virtuti conuenientes, modulationes, ac motus facilius traderet, & vitiorum defectus, atq; exceſſus apertius indicaret. Quid? quod vel Dijs adeo curæ fuiſſe exiſtimarit mortales Geometria inſtitui, vt eius contemptum grauibus pœnis perſequerentur. Delijs enim peſte laborantibus, teſte Philopono in comment. in 7. c. primi poſteriorum ad illa Ariſtotelis verba, ἀλλ' ἔδει ὅτι δύο κύβοι κύβος: conſultus Apollo reſpondit liberatum iri peſte ſi arā ſuam, quæ cubicæ erat figuræ, duplicaſſent: conductores priori aræ cubum alterum æqualem ſuperpoſuerunt, atq; ità cubi forma immutata facta eſt ara non cubica ſed δοκὶς ſeu quadrilatera columna. Lue itaq; minime ceßante iterum conſulentibus reſpondit Apollo nō eßе oraculo ſatisfactum, ſe enim imperaſſe vt aram forma cubi retenta priore duplo maiorem erigerent, non vt cubo cubum imponerent. Hoc illi oraculum ad Platonem deferunt, qui reſpondit neglectæ Geometriæ Græcos à Deo accuſari, neq; id aliter fieri poſſe quam ſi inter duas in dupla proportione datas rectas (quod tamen ante ipſum Hippocrates Chius animaduerterat) duæ mediæ proportionales reperirentur. Quod problema non ſolum ad diſcipulos reiecit, ſed ipſe quoq; in eodem argumento elaborauit, excogitato elegantiſſimo meſolabio quod extat apud Eutocium in comment. ſuper ſecundum Archimedis de ſphæra, & cylindro, Philopono, quod quis mirari poſſit, non viſum. Neq; vero hoc vnum illius inuentum fuit; nam primus ſectiones Conicas & Cylindricas, vt quidam exiſtimant, inchoauit; modum demonſtrandi per analyſim excogitauit; rationem Gæodeticam agri dimentiendi elegantiſſimam reperit. Sed hæc de eo alij; Quid vero ſi quæ extant eius ingenij monumenta euoluamus, quàm multa in eis Mathematica occurrent, quæ etiam olim Theon Smyrneus, ac Philippus Mendæus commentarijs illuſtrarunt? Sed quod ad rem noſtram magis facit, quot ille paſſim laudibus Matheſin totam, ſed Geometriam præſertim in cælum extollit? An non in Timæo Mathematicam cognitionem erudiendi viam appellat, quod, vt inquit Proclus, eam habeat rationem ad vniuerſorum ſcientiam quam eruditio ad virtutem, ac velut hæc animum probis ad vitam moribus informat, ita illa cogitationem noſtram animæq; oculum ad eam quæ inde procedit euectionem ſeu circumactionem præparat? Annon de legibus 6. & 7. de ſingulis Mathematicis addiſcendis leges ſancit, ac tantum Geometriæ tribuit vt aſſerat qui aſymmetriam quantitatum ignoret eum non in hominum ſed pecudum cenſu habendum eße? Quid? quod apud eum in Republica Socrates aßerit oculum animi qui alijs ſtudijs veluti excæcatur

Philoponus in 7. c. 1. poſteriorum.

Valer. Max. l. 8. cap. 13.

Plut. de dæmon. Socratis.

Proclus l. 2. elem. c. 4.

Eratoſthenes, apud Eutoc. Comment. ĩ Archimed.

Laert. ĩ Plat.

2. Vitruuius. lib. 9. c. 1.

Proclus c. 8. in lib. 1. elementorum.

Proclus ibid.

Plato 7. de Rep.

cæcatur atq; effoditur, Mathematicis diſciplinis recreari, & ab inanibus ſimulachris & rerum ludibrijs ad ea quæ vera ſunt; ab obſcura ac dubia luce ad vibratum intelligendi fulgorem, & prorſus àſpecu & vinculis generationis, ac materialibus retinaculis ad incorpoream & indiuiſam eſſentiam exurgere? Ac ne longior ſim, Mathematicam vbiq; ſcientiam vocat, maximæ felicitatis cauſam, eiusq; luminis largitricem, quod iuxta Homericam Mineruam decem mille corporis, ideoq; vniuerſis Argi oculis ſit præferendum. Proclus c. 10. in 1. elé. Homerus in Odyſſ.

At cur iſta tam multis commemoraui, mi Lector? non alia de cauſa quam vt te non in admirationem tantum, ſed etiam in ſtuporem ac ſi fieri poſſit etiam in ecſtaſim rapiam, cum te ad coronidem deduxero, atq; oſtendero quam inconcinnum faſtigium elegantiſſimo operi imponere, atq; abſonam perorationem tot Matheſeos laudibus atq; elogijs addere videatur. Nempe ſub finem libri ſeptimi de Republica ſic de Geometria ſtatuit. Αἱ δὲ λοιπαὶ ἃς τοῦ ὄντος τὶ ἔφαμεν ἐπιλαμβάνεσθαι γεωμετρίαν τε καὶ τὰς ταύτῃ ἑπομένας ὁρῶμεν ὡς ὀνειρώττουσι μὲν περὶ τὸ ὄν, ὕπερ δὲ ἀδύνατον αὐταῖς ἰδεῖν ἕως ἂν ὑποθέσεσι χρώμεναι ταύτας ἀκινήτους ἐῶσι μὴ δυνάμεναι λόγον διδόναι αὐτῶν. ᾧ γὰρ ἀρχὴ μὲν ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ τὰ μεταξὺ ἐξ οὗ μὴ οἶδε συμπέπλεκται, τὶς μηχανὴ τὴν τοιαύτην ὁμολογίαν ποτὲ ἐπιστήμην γενέσθαι. Quod ita vertit Marſilius Ficinus. Reliquæ vero quas diximus verarum rerum eſſe participes Geometriam ſcilicet eiusq; comites circa ipſam eſſentiam quodammodo ſomniant, ſyncere autem ab illis quicquam cernere impoſſibile eſt, tantiſper dum ſuppoſitionibus hærent, easq; ratas & immobiles adeo ſeruant vt illarum rationem reddere nequeant. Nam vbi principium quidem ponitur id quod eſt ignotum, finis autem & media ex ignoto tracta connectuntur, collectam inde aſſertionem quonam pacto ſcientiam vocemus? De cuius verſionis fide ſi dubitas, en noſtram ad verbum ferme redditam. Reliquæ vero quas entis aliquid compræhendere diximus Geometriam videlicet, & quæ ipſam ſequuntur, videmus vt ſomniant circa id quod eſt, ſupra autem impoſſibile ipſis videre, dum ſuppoſitionibus vtentes eas immobiles ſinunt, earum rationem reddere minime valentes. Cui vero principium eſt id quod non nouit, finis vero & media ex eo quod minime nouit, qui fieri poterit vt ex huiuſmodi aſſenſu ſcientiam conſequatur? Deum immortalem quid hoc ad verſum? Itane quam tot laudibus cumulaſti, quam toties honorifico ſcientiæ nomine compellaſti, vni Dialecticæ ſeu Diuinarum rerum cognitioni inferiorem aſſeruiſti, nunc certiſſimam ignorationem, Plato 7. de Rep.

inane commentum, ac ſomniantis mentis ludibrium vocas? Adeo ne ſubito calculum reducis vt quam paulo ante vnione & creta momento poſt carbone notes? Annon hoc quidlibet ex quolibet efficere, &

Humano capiti ceruicem iungere equinam?

Scio quid ad hæc non ſine ratione dici queat; Platonem ζητητικὴν *methodum ſequutum rebus nomina, quæ primæ rationes offerebant indidiſſe, hinc cum melior melioris notionis ſpecies effulgeret priori denominatione abrogata magis conuenientem atq; accommodatam ſubſtituiſſe, atq; eousq; ſolerti indagine proceſſiſſe dum apicem attigiſſe, remque omnibus numeris abſoluiſſe, & ad ſenarium deduxiſſe videretur. Scientiam nempe, vt inquit Proclus, plæriſq; in locis omnem vniuerſalium appellat cognitionem, ipſamq; ſenſui ſingularia cognoſcenti opponit, quo ſenſu in Ciuili, atq; in Sophiſta non tantum Sophiſticam ſed etiam adulatoriam præclaro hoc nomine dignatur. Hanc autem vniuerſalium cognitionem rurſus in eam quæ cauſas probat, quæq; abſq; cauſis cognoſcit diſtribuit, atq; illam quidem ſcientiam, hanc experientiam cenſet appellandam. Res enim, inquit in Sympoſio, quæ rationem nullam habet, quo tandem pacto ſcientia eſſe poſſit? Hanc vero ſcientiam cui cognoſcendi vim cauſa tribuit rei ſubiectæ proprietatibus iterum diuidit, & vnam quidem partibilium coniectatricem ſeu* στοχαστικὴν *alteram vero eorum quæ per ſe ſunt, eodemq; modo ſemper habent cognitionem appellat, quo pacto Medicinam, & omnem quæ res ex materia concretas pertractat à ſcientiarum conſortio ſeiungit. Mathematicam vero atq; omnem omnino rerum ſempiternarum cognitionem ſcientiæ nomine cohoneſtat. Hanc deniq; ſcientiam ita partitur vt alteram ab omni ſuppoſitione immunem eſſe velit, alteram ex ſuppoſitione ſcaturire, & illam quidem citra ſuppoſitionem vniuerſorum cognoſcendorum vim habere, & gradatim ad ſupremam rerum omnium cauſam, atq; vltimum bonum ſcandere, in quo tandem conquieſcat: hanc vero certa ſibi principia præfinire, ex quibus demonſtret quæ ea conſequuntur, ideoq; non ad principium, ſed ad finem tendere, cuiuſmodi cum ſit Matheſis eam, vtpote ſuppoſitionibus vtentem ab illa quæ ſuppoſitiones omnes excludit, ideoq; abſolutiſſima ſcientia cenſenda eſt, deficere.*

Proclus cap. 10. in 1. Element.

Acute hæc quidem, ſed ſi Platonis verba diligentius penſitentur, eorumq; ſenſus penitius inſpiciatur, vereor ne aliter ratiocinandum ſit.

Ego

Ego quidem ſic cenſeo ad perfectam ſcientiæ conſtitutionem id requiri non modo vt certum ſit rem ſubiectam aut eſſe, aut eſſe poſſe, ſed eius definitionem, cuius veluti lumine paſſiones in ſubiecto hærere demonſtrantur, recte atq; probe inſtitutam eſſe. Hoc ni conſtet Cimmerias tenebras eſſe non ſcientiam, neq; vigilantis mentis certum ſpectaculum, ſed ſomniantis animi inane ſpectrum eſſe dicendam: Quid enim? aſſerat aliquis ſatis eſſe ad ſcientiam, vt ſubiectum eiuſq; definitio ſupponatur, non probetur: hinc ex ſuppoſitione certa conſequentia deducatur. An non ego ſtatim efficiam vt de Chimæra ipſa certa cognitio eſſe poſſit? Deprome ex poetarum figmentis Pegaſum: illum demonſtrationis materiam hypotheticam ſtatue, hinc ſua definitione ita circumſcribe, vt ſit equus alas pro corporis portione atq; viribus humeris inſertas habens; mox ita ratiocinare: omnis equus alas pro corporis mole atq; viribus habens volare poteſt, atqui huiuſmodi eſt Pegaſus, volare igitur poteſt. Hæccine erit demonſtratio? riſu ac ſibilis explodendus ſim ſi aſſeram. At recte ſequitur ex hypotheſi Pegaſum volare poſſe; rectiſſime; verum non hæc demonſtratio eſt, ſed rei abſurdæ ex abſurda conueniens ac ſecundum formam illatio. Iam vero cum Geometriæ ſubiectam materiam diligentius ad libellam exigo, videor mihi comperire minime compertum eſſe, aut quod ipſa exiſtere poſſit, aut quod eius definitiones recte ſint inſtitutæ. Nam vniuerſale quidem quid conſiderat Geometria, non tamen vnum ante multa, vt Dialectica Platonis aut Ariſtotelis Metaphyſica, id enim non omnis tantum mutationis, ſed & diuiſionis ratione caret: neq; vnum in multis vt Naturalis ſcientia, vbi enim in ſingularibus impartibile, vel latitudinis expers? vbi quantitas craſſitie carens? vbi ex circuli centro ſeſe effundentium linearum æqualitas? vbi ſemper ſtabiles laterum rationes, atq; angulorum rectitudines? certe quod ſciam nullibi, nam quæcumq; ſenſibus obuiæ ſunt figuræ confuſa commiſtione turbatæ ſunt, neq; quicquam in eis reperitur, quod a contrario purum atq; ſincerum aſſeri poſſit. Sed neq; vnum eſt ex multis, quod experientiæ atq; coniecturæ proprium eſt, altius enim aſſurgit Geometria, & ex principijs vniuerſalibus non ab experimentis particularibus in ſuas concluſiones progreditur. Quod nam ego dicemus eſſe Geometriæ obiectum? idem quod ipſe Plato vnum ex vna anima, quæ Geometricarum formarum vnica genitrix, eas non alieno ſemine ſed ſua vi atque energia in ſe ipſa conceptas fecundo ſinu excludit: ideoque idem ille Diuinus author primas ſubſtantias à materiæ contagione intaminatas intelligentiæ; ſenſibiles & infimam natura condi-

ræ conditionem ſortitas opinioni, & coniecturæ; medias formas, cuiuſmodi ſunt Mathematicæ, mediæ inter intelligentiam & opinionem cogitationi attribuit, quod eas non materia promat ſed ſola cogitatio effingat. Sed eadem Chimeras, Harpyas, Gorgonas effingit; Verum id quidem, ſed hoc inter ea figmenta, & Mathematicas figuras intereſſe dices, quod iſtæ inſtar idæarum ac abſolutiſſimorum exemplarium obtineant, ad quæ quo ſimilitudine propius ſenſibiles acceſſerint, eo maiorem perfectionem atque certitudinem nanciſcantur. Atqui vel de hoc ipſo ambigo, num hæc vera ſint rerum quæ eſſe poſſint exempla, non minus quam vtrum perfecti equi idea ſit Pegaſus, & vtrum eorum definitio ad exactam rei fidem ſit condita. Num igitur forte ad hæc reſpiciens vir ſapientiſſimus ait Geometriam circa eſſentiam ſomniare, ac rei non veræ ſed ſuppoſita definitione fabrefactæ, quæ forſan ideo theſis à Geometris dicta eſt, naturam inquirere, cuius rationem ideo reddere nequeat quod eius principia tanquam rei commentitię non cognoſcat. Hanccine igitur Geometriæ labem hærere ſinemus, vt quę omnium pene philoſophorum calculis inter principes ſcientias non infimam hactenus ſedem obtinuit, ea iam capite cenſeatur, ac in viliſſimam figmentorum turbam tanquam inane λῆρον amandetur. minime vero, remedium eſt quo huic malo ſuccurratur, & quod magis mireris ex medicinæ ſcito depromptum, quo contraria contrarijs curari ſtatuuntur.

Nihil vt ego quidem reor Matheſi magis contrarium eſt quam motus. Vulgatum eſt in ſuperiori Licæo, neque diſſonat inferior Academia, Mathematicam abſtrahere à motu. Ita naturæ magnus interpres tum alibi paſſim, tum 2. Phyſic. c. 2. qui quantum non ea ratione ſpectari ait à Mathematico qua à Phyſico, nam ille inquit quanta

Ariſt. 2. Phyſic. c. 2. χωρίζει, χωριστὰ γὰρ τῇ νοήσει κινήσεως ἐστι, καὶ οὐδὲν διαφέρει, οὐδὲ γίνεται ψεῦδος χωριζόντων. Separat, ſeparata autem ſunt mente a motu. & nihil intereſt nam abſtrahentium falſitas non eſt; & paulo poſt τὸ μὲν γὰρ περιττὸν ἔσται καὶ τὸ ἄρτιον, καὶ τὸ εὐθὺ καὶ τὸ καμπύλον, ἔτι δὲ καὶ ἀριθμὸς, καὶ γραμμὴ καὶ σχῆμα ἄνευ κινήσεως. Impar vero & par, & rectum, & curuum, inſuper vero & numerus, & linea, & figura ſunt ſine motu. Ipſe vero toties commoratus nec vnquam ſine laude commemorandus Plato adeo motum in Geometria reformidat, vt ne ipſa quidem nomina quibus quanta quadrari, produci, addique dicuntur in vocum Geometricarum nomenclaturam admittere velit: ita enim in

Plato 7. de Repub. 7. de Repub. λέγουσι μὲν που μάλα γελοίως τε καὶ ἀναγκαίως. ὡς γὰρ

πρατ-

πράττοντες, καὶ πράξεως ἕνεκα πάντας τοὺς λόγους ποιούμενοι λέγουσι τετραγωνίζειν τε καὶ παρατείνειν, καὶ παρατιθέναι, καὶ παντα οὕτω φθεγγόμενοι. τὸ δ' ἐστὶ που πὰν τὸ μάθημα γνώσεως ἕνεκα ἐπιτήδευομενον. *Loquuntur quidem admodum ridicule atq; coacte qui tanquam agentes atque effectionis gratia verba facientes dicunt quadrare, producere, apponere, atq; aliis eius generis vocibus vtuntur; quaſi uero diſciplina cognitionis ergo non quęratur. Idem etiam Eudoxū atq; Architam Tarentinum, ac Menechmum, reprahendiſse dicitur quod Geometriam ad Mechanicam quæ motu exercetur traduxiſsent, atque Philoſophiam proſtituiſſent. At audi paradoxum non minus verum quam admirandum. Aio neque Geometriam eſſe abſque motu, neque eius veritatem ſine motu intelligi poſse. Nemo eſt qui Philoſophiam vel à limine ſalutarit, cui notum non ſit Matheſeos ſubiectum eſſe quantitaem: hanc autem vel continuam eſse vel diſcretam; illam Geometriæ iſtam Arithmeticæ materiam præbere: rurſus continuam vel permanentem eſse vel ſucceſſiuam: ſucceſſiua comprehendi motum atque tempus ideoque motum materiæ tamen inquinamentis expurgatum Geometriæ ditione teneri. Sed & aſsero permanentis ipſius quantitatis veritatem in profundiſſimis tenebris immerſam latitare ni eā inde motus in apertam lucem eruat. Supponit Stichiota lineam eſſe quæ in longitudinem extenditur. latitudine omnino caret; & rectam dici cum ex æquo ſua interiacet puncta. Ego vero hac de re plurimum non dubito, cum enim neque lineam rectam, nec lineam in rebus indiuiduis vnquam viderim, num ea ſit, ant omnino oſſe poſſit, vel ſi vtrumque ſit, vtrum recte ſuis terminis circumſcripta ſit, ac probe definita certo ſtatuere non poſſum. Prodeat in medium motus ac punctum afficiat, fluat illud, ac ſui veluti veſtigium relinquat, an non ſtatim intelligis progreſsu illo longitudinem delineari latitudine carentem? ni velis aſserere punctum a quo producitur ſecari poſſe, quod indiuiduæ ipſius naturæ omnino aduerſatur: quod ſi idē punctum breuiſſimo interuallo ex vno in alium terminū contēdat, ita vt ab eo ne tantillum quidem deflectat, nunquam ſubſultet numquā ſubſidat: cui nō ſtatim manifeſtū euadit et lineam rectam eſse poſse, & recte eſſe definitam? neq; aliter de ſuperficie ſtatuendum; ſed apertius forte aſsertioni fidem aſtruit circulus, & quæ ex eo figuræ ſeu planæ ſeu ſolidæ deriuantur. Circulus inquit elementorum artifex, eſt figura plana vna linea contenta quæ circumferentia vocatur, ad quam ab vno puncto eorum quæ intra ſuperficiem ſita ſunt omnes rectæ incidentes inter ſe ſunt æquales. Hic amarum renidebit moroſus veritatis perſcrutator,*

Plut. in Marcell. & in Sympoſiac.

Euclid. defin. 2. & 4. lib. 1.

Euclid. def. 15. l. 1.

tor,

tor, ac quaſſato capite fronteq; caperata negabit huiuſmodi figuram reperiri poſſe, neque ſi extet ſignum ſuo complexu continere à quo eius ambitus paribus vndequaque radijs attingatur. Sed aduocetur linea recta, ac in plano aliquo circa alterum ſui extremum tanquam cardinem conuoluatur dum eo vnde motus exordium ſumpſit regrediatur: momento circulum efformatum intelligis, ac verticem immobilem circa quem deſignatrix linea conuerſa eſt centrum non dubitas affirmare, à quo omnes rectas ad peripheriam æquales ideo audacter pronuncias, quod ſingulæ cum linea mota coincidant, ideoque cum ei, tum inter ſe, quod ex primo pronunciato conſtat, ſint æquales. Neque aliter Sphæræ faces præfert motus, cum manente ſemidiametro, ſemicirculus in ſe ipſum rurſus reuoluitur vnde moueri cęperat, circum aſſumpta figura: aut Cono, quando trianguli rectanguli manente vno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſeipſum reuertitur: aut Cylindro quando motu parallelogrammi eodem modo procreatur. Denique nulla eſt figura licet aut compoſitione fiat, aut ſectione cuius veritatem præcedens aliquis motus non aſſerat. Et certe, quod mirum eſt, hæc ad verbum Platonis ſententia eſſe videtur in eo quem ſupra produximus ex 7. de Republica, loco, cum ait fieri non poſſe vt Geometria eiusque Comites quidquam videant dum ſuppoſitionibus vtentes eas immobiles relinquunt, earum rationem reddere minime valentes: quaſi dicere velit tum demum futurum vt videant cum ſuas ὑποθέσεις ſeu ſuppoſitiones (ita definitiones vocantur) mobiles effecerint, easque demum rationem antea ignotam facile reddituras. Neque eam tantum Matheſeos partem quæ in contemplatione verſatur illuſtrat intelligibilis hic motus, ſed & ei quæ veluti effectione quadam perficitur adeo neceſſariam operam nauat, vt ſine ea cõſtare nulla ratione poſſit. Quod enim Problema intelligi, ne dum ſolui queat in quo aut rectæ a ſigno ad ſignum non moueantur, aut in infinitum producantur, aut ad certos angulos inflectantur, aut additione vel ſubtractione augeantur minuaturue, aut in partes ſecentur, aut alijs huiuſmodi Mathematicis motionibus non cieantur? Vides igitur vt non tantum in Phyſicis, ſed etiam in Mathematicis motus fidiſſimi indicis inſtar latentes veritatis receſſus explorat, eoque vacillantem animum veluti manu ducit: atque vt illic ex Philoſophi decreto ignorato motu, naturæ ignoratio ſequitur, isque eſt qui primum rerum omnium motorem, puram cæleſtium orbium ἐντελέχειαν, elementorum in mutuas transformationes propenſionem accuratè perueſtigat, atque admirabilem

Euclid. def. 14. 18. 21. lib. 11.

lem

lem illum Protheum varijs accidentium laruis, ac omnigena aſpectus mutatione menti illudentem deprahendit, formaque ſuæ redditum in Intellectus aſpectum producit; ita in Mathematicis tanquam ductarius funis cogitationis trochleæ circumuolutus latentem in imo Democriti puteo rerum Geometricarum veritatem expiſcatur ac tantum non corporis oculis ſpectandam in apertam demonſtrationum lucem educit.

Sed aduerte mi lector duplicem fieri in plano motum (Mathematicum hic ſemper intelligimus, non phyſicum à quo matheſis penitus ſeiuncta eſt) alium qui non tantũ fieri poſſe ſed quomodo fieri poſſit intelligitur aut citra demonſtrationẽ, aut præcedentis alicuius demonſtrationis præſidio, alium qui fieri quidem poſſe deprehenditur, ratio tamen qua fiat non apparet. Exempli loco, lineam rectam circa alterum ſui extremum moueri, ac circulum delineare poſſe, idq; quo pacto fiat ſtatim intelligis; duas vero rectas ita moueri poſſe vt in perpetuo vtriuſque augmento eadem vtriuſq; analogia ſeruetur non percipis, niſi problemate 4. ſexti elementorum informatus quo tribus datis rectis lineis quarta proportionalis inuenitur. Rurſus in deſcriptione lineæ Quadrantis quam teſte Pappo lib. 4. collectionum Mathematicarum Dinoſtratus ac Nicomedes alijque iuniores ad circuli τετραγώνισμον excogitarunt facilè percipis fieri poſſe, vt qua proportione recta rectã, eadem recta circularem ſecet, qua vero ratione id fieri queat non intelligis; cum nondum eo Geometriҽ inuentum peruenerit, vt tribus datis lineis rectis quartam proportionalem circularem reperire valeat. Poſtremum hunc motum, quæque ex eo procreantur, figuras inter Geometricas non auſim recenſere, cum non conſtet num ex Geometriæ fontibus deriuari poſſint. In ijs tamen non ſine magno fructu, ac iucunditate verſati ſunt grauiſſimi authores, earumque proprietates quibuſdam ſuppoſitis demonſtrarunt vt lineæ Conchyliatæ Nicomedes, Volutæ Archimedes, Quadratricis Dinoſtratus, Hæderiformis ac Clypearis Geminus, Paradoxæ Menelaus, Spiricarum Perſeus, noſque ſequenti libro de earum nonnullis nouas affectiones demonſtrabimus. Primum vero motum & qualemcumque enatam ex eo formarum ſobolem Geometricæ familiæ annumerandum eſſe conſtanter affirmo. Quid ni? cum motus ipſe Geometricus ſit, & figura quam progenuit per Geometricas ἀποδείξεις Geometrici generis eſſe comprobetur, niſi velis contendere eum in hoc album referendum non eſſe cuius γένεσις non ſtatim, ac primo intuitu vt circuli, ſed de-

Proclus & Pappus.

Mm mon-

monſtrationum velut adhibito collyrio appareat. Itane? ergo nihil in Geometria Geometricum præter hypotheſes, petitiones, ac dignitates cenſendum erit; cum reliqua omnia demonſtrationum adminiculo comparentur. Quid? quod Demonſtrationes id nominis maiori iure quam principia ipſa ſibi vendicare videntur? Scientia eſt Geometria, ratiocinatrix igitur ac diſcurſiua, quæcunque ergo diſcurſu ab ea procedunt maiori ſimilitudine Genitricem referunt, quam definitiones illæ, atque effata quæ natales ſuos primæ aut ſecundæ mentis operationi acceptam ferunt.

Pappus lib. 3. ad propoſit. 4. & lib. 4. ad propoſit. 30.

Sed quorſum tam multa, mi lector? Problematum antiqui tria genera ſtatuerunt, & eorum alia plana ſeu Geometrica, alia ſolida, alia linearia appellari. Quæ igitur per lineas rectas, & circuli circumferentiam ſolui poßunt plana ideo dicuntur, quod lineæ per quas ſoluuntur in plano ortum habeant: quæ vero enodantur aßumpta in conſtructionem coni ſectione ſolida nuncupantur, quod ſolidarum figurarum ſuperficies, conicas nimirum adhibeant. Denique cum præter dictas lineas aliæ aſſumuntur varium ac traſmutabilem ortum habentes quæque ex inordinatis ſuperficiebus & motibus implicatis fiunt, quales ſunt Helices & quas Græci τετραγωνιζούσας appellant, tertium genus exiſtit quod lineare vocitatur. Ego vero in quinto hoc libro, nouo vt reor inuento, ſectiones omnes conicas Ellipſim, Parabolam, Hyperbolam in plano motu lineæ rectæ quæ ſubtenſæ in circulo continuo ſit aut æqualis aut proportionalis deſcribo, varias earum affectiones atque analogias demonſtro. Eas igitur figuras Geometricas eſſe & quæ de iis traduntur ſiue Theoremata ſiue Problemata certiſſima eße, nec ſolidis tantum ſed etiam planis ac Geometricis enumeranda eſſe contendo cum motu, circulo, & lineis rectis non tantum in plano delineentur, ſed & earum affectiones omnes comprobentur. Vt ideo Pappo Alexandrino amplius aſſentiri non poſſim dum erroris arguit Geometras qui Problema planum per conica expediunt, quaſi ex improprio genere media depromant atque ineptis inſtrumentis minimeque conuenienti materia eius ſubſtructionem moliantur. Sed fiunt

Apoll. 3. lib. 1. conic.

Seren. p. 2. de ſectione cylindri.

Apoll. 5. p. lib. 1. conic.

ſectione corporum ſolidorum? Quid tum? fit & triangulum ſectione Coni per verticem; parallelogrammum deſcribitur ſectione cylindri per axem: Circulus vtriuſque ſectione aut baſi æquidiſtante, aut ſub contrarie poſita, aut globi qualicumque delineatur, ideo ne igitur plana ac Geometrica de iis Theoremata ac Problemata non ſunt quod etiam ſolidorum τομῇ deſcribantur? At forſan vrgebis ideo Geo-

metrica

metrica non eſſe quod earum definitiones in Geometricis elementis non tradantur: quaſi vero nihil Geometricum cenſendum ſit præter elementa: Annon idem hoc ac ſi quis aſſerat nihil in phyſicis naturale eſſe quod elementum non ſit? Cur vero antiqui Geometræ admirati mirificas Theorematum conicorum demonſtrationes ab Apollonio Pergæo prolatas illi magni Geometræ agnomen indidiſſent; niſi materiam in qua verſabatur Geometricam iudicaſſent? Ex his efficio Problema quo inter duas datas rectas duæ mediæ proportionales à Menæchmo (quem conicarum ſectionum authorem Proclus facit) per duas parabolas ſe ſe in puncto ſecantes inueniuntur, quod octauum eſt apud Eutocium in 2. Archimedis de ſphera & cylindro, & planum eſſe, & Geometricum, ideoque cubi duplicationem Geometrice eſſe repertam. Neque vero hic quis opponat punctum in quo geminæ illæ parabolæ coeunt non aſſignari, neque enim id magis requirendum eſt, quam vt in primo apud Euclidem Problemate punctum in quo duo circuli ex duobus datæ rectæ lineæ extremis deſcripti ſe ſe ſecant alio modo quam ipſa circulorum deſcriptione deſignetur. Quod ſi vlterius ineptiat, ac dicat ideo punctum illud apud Euclidem non aſſignari quod vno circini circumductu aperte determinetur, quod in parabolis fieri non poteſt, an non animaduertit quantam iniuriam matheſi inferat, cum eam ſordida mechanicorum inſtrumentorum tractatione infamat, ac eius nobilitati humilis artis exercitio notam inurit? Sed ſi hoc velit, nos quoque organon inueniemus quo perpetuo ductu Parabola delineetur. Eutocius in ſecundum Archimedis de ſphæra & cylindro meminit inſtrumenti cuiuſdam ad ſimilitudinem Græci λαμβδα *conformati, quo ſectio coni rectanguli, ſeu Parabola deſcribitur, eiuſque inuentionem Iſidoro cuidam Mileſio mechanico magiſtro ſuo attribuit, qui illud etiam in commentarijs camaricarum Heronis deſcripſerit. Ratum igitur eſto, figuras haſce licet coni ſectione etiam fiant alterius nihilominus generis etiam eſſe: cumque motu poſſibili progignantur, vere & exiſtere & ex motu illo definiri poſſe: iſque cum Geometricus ſit, eas quoque Geometrico Schematum ordini inſerendas eſſe: denique cum in plano per circulum & lineas rectas deſcribantur, in planis cenſenda eſſe quæcumque de illis Theoremata ac Problemata procuduntur. Sed de his hactenus.*

Seren. 5. & 6. de ſectione cylindri. Theodoſ. prop. 1. primi ſpheric. Eutocius in primum Conic. initio.

Nos totum hunc librum ſectionibus conicis tribuemus, earum genus in plano ex circulo per motum manifeſtum deducemus, varias earum ἰδιότητας *inueſtigabimus, nonnullas etiam analogias, ſed veluti per*

tranſennam, indicabimus, vberiorem enim de ijs tractationem in eum librum reijcimus quem de dimenſione & quadratura Hyperbolæ, Deo fauente, edituri ſumus, quem peculiarem ideo eſſe voluimus, vt nouum inuentum ab aliorum conſortio ſegregatum intentius ſpectetur & maiori cum admiratione, legentium in ſe animos conuertat. Præmittimus autem aliquot definitiones tum vt noua nonnulla quæ nos reperimus, explicemus; tum vt moleſtas circumlocutiones, quæ paſſim vſurpandæ eſſent, euitemus.

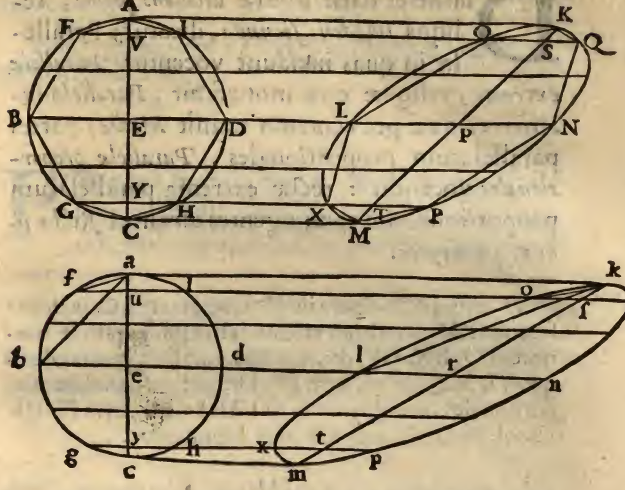
DEFINITIONES.

I.

SI duabus rectis parallelis recta occurrat, quæ ſit diameter alicuius figuræ intra parallelas contentæ; & in eaſdem aut alias parallelas alia recta incidat, vnaque aut duæ parallelæ ex eadem in eandem partem ità moueantur alteri continuò parallelæ, vt illa ſuam diametrum, iſta ſuam incidentem eadem ratione diuidant; & partibus parallelæ quæ à figuræ peripheria circa diametrum compræhenduntur partes alterius parallelæ circa ſuam incidentem ſint proportionales: dicatur ille *Motus ad datam figuram inter duas parallelas æquidiſtanter proportionalis*.

SINT duæ rectæ parallelæ AK. CM. in quas incidat recta AC. quæ ſit diameter cuiuſcumque figuræ, vt verbi gratia, circuli intra dictas parallelas contenti: & in eaſdem aut alias parallelas AK. CM. alia recta MK. incidat, vnaque

que parallela vt AK. in prima figura, aut AK. in prima, & ak. in ſecunda ita moueantur alteri CM. aut cm. conti-



nuo parallelæ vt AK. ſuam diametrum AC.& incidentem KM. in partes eiuſdem rationis diuidant aut in quam rationem recta AK. rectam AC. aut KM. in eaſdem rectam ak. ipſam ac. aut km. ſecet: ſintque partibus ipſius parallelæ VF. VI. circa diametrum, partes SO. SQ. aut so. sq. circa incidentem KM. aut km. Item partes BE. ED. ipſis LR. RN. aut lr. rn. & GY. YH. ipſis HT. TP. aut ht. tp. atque ita continuo in reliquis, proportionales; motum illum linearum AK. ak. vocabimus ad datam figuram, vt hic ad datum circulum inter duas parallelas (ſiue illæ eadem, ſint ſiue diuerſæ) æquidiſtanter proportionalem.

Dia-

II.

DIameter datæ figuræ *Incidens prima*, reliqua *Incidens ſecunda*, dicatur; Parallelæ in quas incidunt vocentur *Parallelæ extremæ*; reliquæ quæ motu fiunt, *Parallelæ interiores*; quæ per centrum tranſit *Media*; partes parallelarum proportionales, *Parallelæ proportionales* vocentur: rectæ extrema parallelarum proportionalium coniungentes dicantur *Rectæ ſibi reſpondentes*.

Vt in propoſita figura incidens prima eſt AC. incidens ſecunda KM. parallelæ extremæ AK. CM. parallelæ interiores FQ. BN. GP. &c. ipſa BN. parallela media, denique VI. SQ. aut sq. item FV. OS. aut os. parallelæ proportionales; denique rectæ KO. AF. ko. af. Item FB. OL. fb. ol. rectæ ſibi reſpondentes nominentur.

III.

MOtus in quo parallelæ proportionales etiam æquales ſunt dicatur *Motus ad datam figuram inter duas parallelas æquidiſtanter ac æqualiter proportionalis*: ſi vero parallelæ proportionales ſint inæquales, *Motus inæqualiter proportionalis*.

IV.

SI vero parallelæ proportionales quæ circa incidentem ſecundam mouentur, figuram ſuis

ſuis extermis deſcribant, ea vocetur *Figura ad datam Analoga*.

Vt in propoſito figura KLMN. aut klmn. dicitur ad datum circulum analoga.

V.

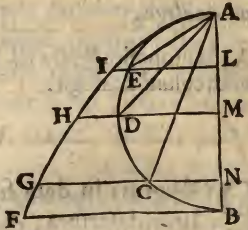
Polygona in data figura, & in analoga ſimiliter deſcripta, dicuntur cum totidem rectis ſibi reſpondentibus, in vtraque figura continentur.

Vt polygona AFBGCHDI. & KOLXMPNQ. & kolxmpnq. polygona in data figura, & in analoga ſimiliter deſcripta nuncupantur, eo quod rectis ſibi reſpondentibus terminentur.

VI.

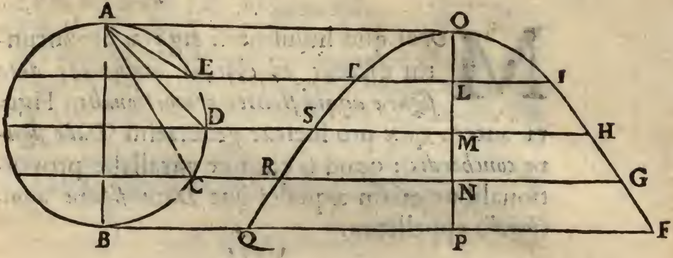
Si in circulo, chordarum maxima circa verticem figuræ ita conuertatur vt continuo peripheriam in puncto ſecet, per quod tranſiens recta quæpiam ita moueatur vt cum diametro per verticem tranſeunte æquales angulos faciat, ſeu continuo parallelas delineet, eaſque chordis inter verticem & peripheriam interceptis proportionales: deſcribet dicta parallela altero extremo lineam curuam ac figuram quam vocemus Conicoides primum.

Vt ſit circulus ADB. cuius vertex A. diameter AB. maxima chorda AB. quę circa alterum diametri extremum ſeu verticem A. ita circumagatur vt peripheriam continuo ſecet verbi gratia in punctis B. C. D. E. per quæ tranſeat FB. ac ita ſurſum moueatur vt cum AB. faciat angulum quemcumque FBA. ac motu parallelo delineet rectas parallelas GN. HM. IL. proportionales chordis AB. AC. AD. AE. nempe vt AB. ad AC. ita ſit FB. ad GN. & vt AC. ad AD. ita GN. ad HM. & vt AD. ad AE. ita MH. ad IL. procreabit dicta linea FB. altero extremo F. lineam curuam FGHIA. quam *Conicoides primum* liber appellare tantiſper dum eius naturam inueſtigauerimus.



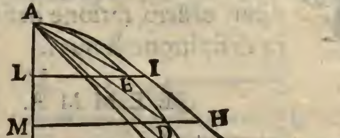
EAdem figura producetur ſi intra duas parallelas duæ incidentes ducantur rectæ, quarum prima ſit perpendicularis, ſecunda quemlibet angulum cum ijs conſtituat; ac circa perpendicularem circulus deſcribatur; moueaturque altera parallelarum ita vt alteri parallelæ ſemper æquidiſtet, ac partes eius circa ſecundam incidentem proportionales ſint chordis quæ a puncto circuli vnde moueri cæpit ad punctum vbi parallela circuli peripheriam ſecat ducuntur, deſcribetur circa ſecundam incidentem linea curua, ac figura quam volumus *Conicoides primum vocitari*.

Vt ſi ſint duæ parallelæ AO. BP. ad quas AB. prima incidens ſit perpendicularis, circa quam circulus deſcriptus ſit ADC. ſecunda incidens OP. cum dictis parallelis



quemlibet angulum faciat; moueatur autem AO. ipſi BF. æquidiſtanter, ita vt tam LI. quam LT. ipſi AE. chordæ, item MH. MS. chordæ AD. ac ſic deinceps ſint æquales deſcribetur linea curua ac figura FOQ. quæ *Conicoides primum* dicatur.

Iam vero ſi ijdem motus fiant in Conicoide primo AOB. vbi chordarum maxima AB. circa verticem A. ita conuertatur vt lineam curuam continuo ſecet, in punctis B. C. D. E. & recta FO. ita ſurſum æquidiſtanter moueatur vt tranſeat per puncta F. G. H. I. faciatque lineas parallelas FO. GN. HM. IL. ipſis AB.



AC. AD. AE. proportionales deſcribet extremum F. lineam curuam AIHGF. quæ vocetur *Conicoides ſecundum*.

Atque eadem ratione circa Conicoides ſecundum ijſdem motibus producetur *Conicoides tertium*, & ita deinceps in infinitum.

VII.

MOtus quo huiuſmodi figuræ producuntur dicatur *ad chordas coniunctas datæ figuræ æquidiſtanter proportionalis*. Figura autem quæ producitur generatim *Datæ figuræ conchordis*: quod ſi chordæ parallelæ proportionalibus etiam æquales ſint *Datæ figuræ æquichordis* appelletur.

VIII.

INcidentes prima & ſecunda: *Parallelæ extremæ interiores, media*: *Rectæ ſibi reſpondentes* eodem modo dicantur quo in ſecunda definitione.

IX.

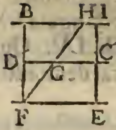
POlygona *ſimiliter deſcripta*, in figuris conchordibus eadem ratione definiantur qua quinta definitione huius.

LEMMA. I.

IN tres parallelas duæ rectæ incidentes ſecantur ab ijs in eadem ratione.

Sint tres parallelæ IB. CD. EF. in quas incidant duæ rectæ ICE. BDF. aut ICE. HGF. ita vt a tribus illis parallelis ſecentur in I. C. E. & B. D. F. & H. G. F. ſintque primum

mum IE. BF. parallelæ. Dico eſſe vt FD. ad DB. ita EC. ad CI. cum enim parallelæ ſint IB. EF. parallelogramma erunt ID. CF. æqualia igitur aduerſa latera BD. IC. & DF. CE. Vt igitur FD. ad DB. ita EC. ad CI. 34. 1.

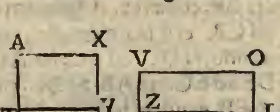


Sed non ſint parallelæ dictæ incidentes vt IE. FH. quæ ſecentur a parallela CD. in C. & G. & ducatur FB. parallela ipſi EI. Dico eſſe vt FG. ad GH. ita EC. ad CI. Eſt enim vt FG. ad GH. ita FD. ad DB. & vt FD. ad DB. ita, 2. 6.
ex prima parte huius EC. ad CI. ergo vt FG. ad GH. ita EC. ad CI. Quod erat ſecundo loco probandum.

LEMMA II.

SI duorum rectangulorum æqualium quælibet latera proportionaliter diuidantur: rectæ per illa puncta perpendiculares rectangula in partes inuicem æquales diuidunt.

Sit rectangulum BX. rectangulo VP. æquale, & fiat vt BT. ad TA. ita PL. ad LO. ducanturque TY. ZL. ad AB. OP. perpendiculares, quæ diuidant rectangula illud in alia duo TX. BY. iſtud in bina ZO. ZP. Dico rectangulum TX. rectangulo ZO. & rectangulum BY. rectangulo ZP. eſſe æquale. Vt enim BA.



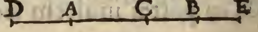
ad AT. ita PO. ad OL. ex hypotheſi: ſed vt BA. ad AT. 1. 6.
ita rectangulum BX. ad rectangulum TX. & vt PO. ad OL. ita rectangulum PV. ad rectangulum LV. vt igitur rectangulum BX. ad rectangulum TX. ita rectangulum PV. ad re-

ctangulum LV. & permutando: æqualia autem ponuntur rectangula BX. PV. igitur æqualia etiam ſunt rectangula
3. pronunc. TX. LV. Quare & reliqua BY. PZ. Quod propoſitum erat demonſtrare.

LEMMA III.

SI data vtcumque diuidatur, atque ei vtrimque duæ rectæ adijciantur eandem rationem cum partibus quibus cohærent habentes: rectangulum ſub data cum adiunctis & altera adiunctarum, ad rectangulum ſub parte cohærente cum eadem adiuncta, & adiuncta, eſt vt data ad partem quæ cum adiuncta cohæret.

Sit data AB. quæ diuidatur vtcumque in C. & adijciantur vtrimque duæ rectæ AD. BE. ſitque vt AC. ad CB. ita AD. ad BE. Dico rectangulum DEB. (ſub data AB. cum adiunctis



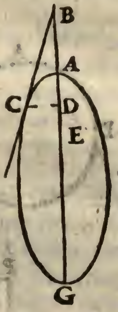
AD. DE. & adiuncta qualibet BE.) ad rectangulum CEB. (ſub parte CB. cum adiuncta & cohærente eadem BE. & adiuncta BE.) eſſe vt datam AB. ad partem BC. quæ cum adiuncta BE. cohæret. Quoniam eſt vt DA. ad BE. ita AC. ad CB. erit permutando, componendo, & iterum permutando, vt DC. ad EC. ita AC. ad CB. & componendo vt DE ad EC. ita AB. ad BC. cum ergo duo rectangula
Schol. 1. 6. DEB. CEB. eandem habeant baſim BE. erunt inter ſe vt altitudines DE. EC. ſed DE. ad EC. eſt vt AB. ad BC. ergo rectangulum DEB. ad rectangulum CEB. eſt vt AB. ad BC. Quod demonſtrandum erat.

LEM-

LEMMA IIII.

PEr datum punctum in peripheria ellipſis contingentem lineam ducere.

Sit in peripheria datæ ellipſis ACG. datum punctum C. per quod oportet ducere rectam quæ ellipſin tangat. Inueniatur axis ellipſis GA. ad quem ordinatim applicetur ex puncto C. perpendicularis CD. & rectæ DA. accipiatur æqualis DE. & hac vt GE. ad ED. ita GA. ad AB. & connectatur BC. Dico quod recta BC. tangit ellipſin in puncto C. Nam quoniam eſt vt GE. ad ED. ita GA. ad AB. erit componendo vt GD. ad DE. id eſt GD. ad DA. ita GB. ad BA. Quare recta BC. ſectionem tangit in C. Igitur per datum punctum in peripheria ellipſis contingentem lineam duximus. Quod erat faciendum. 46.2.Conic. 34.1.Conic.



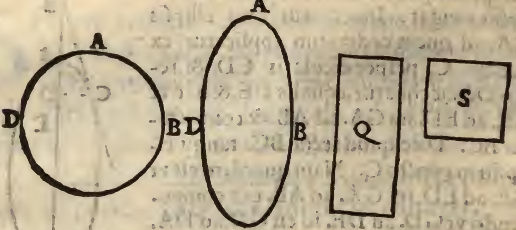
THEOREMA I. PROPOS. I.

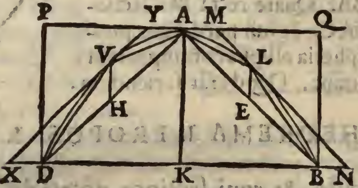
IN circulo, & coni ſectione poteſt deſcribi figura multorum angulorum & numero parium, quæ maior ſit quacumque magnitudine minore quam datus circulus, aut coni ſectio.

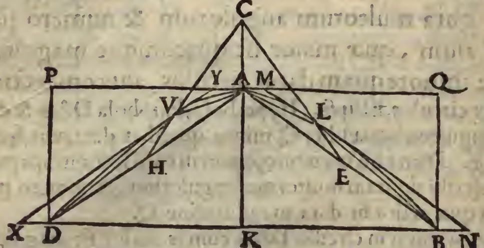
Sit circulus, Ellipſis, Hyperbola, Parabola DAB. & data magnitudo quælibet Q. minor qualibet datarum figurarum. Dico tam in circulo, quam in coni ſectionibus poſſe deſcribi figuram multornm angulorum, & numero parium quæ maior ſit data magnitudine Q.

Ac primum in circulo DAB. cum is maior ſit magnitudine Q. ſit exceſſus quo dictam magnitudinem ſuperat,

2. 12. magnitudo S. conſtat ex 2. 12. elementorum tantum poſſe abſcindi ex circulo DAB. inſcripta figura multorum angulorum, & numero parium, vt relinquatur quoddam ſpatium minus ipſo S. ſpatium autem illud quod relinquitur eſt differentia polygoni inſcripti & circuli, & magnitudo S. eſt differentia magnitudinis Q. & circuli; igitur minori







diſſe-

differentia diſtat polygonum a circulo quam magnitudo Q. ideoque maius eſt polygonum, quam magnitudo Q.

Sit ſecundo ellipſis DAB. maior eadem magnitudine Q. exceſſu magnitudinis S. manifeſtum eſt ex poſitione Archimedis propoſitione 5. de Conoidibus & ſphæroidibus, ſed euidentius, ex Commentarijs Federici Commandini in eandem propoſitionem, in Ellipſi poſſe inſcribi figuram multorum angulorum, & numero parium cuius reſiduum ſeu differentia ad Ellipſim ſit minor differentia S. qua eadem Ellipſis ſuperat datam magnitudinem Q. atque adeo polygonum inſcriptum eſſe maius data magnitudine Q.

Sit tertio Parabola aut Hyperbola DAB. cuius diameter AK. baſis ſeu ordinatim applicata DB. vertex A. & in Hyperbola centrum C. Inſcribatur triangulum DAB. conſtat ſpatium illud maius eſſe quam ſit dimidium ſpatij ſectione DAB. contenti. Nam ſi per punctum A. duxerimus tangentem PQ. parallelam ſcilicet ipſi DB. cui occurrant 17. 1. Conic. ex D. B. perpendiculares DP. BQ. fiet parallelogrammum DPQB. cuius dimidium eſt triangulum DAB. ſpatium vero 41. 1. ſectione Parabolica aut Hyperbolica contentum DAC. minus eſt quam figura quadrilatera circumſcripta DQ. Igitur inſcripta figura ſeu triangulum DAB. maius eſt quã ipſius dimidium. Rurſus rectæ DA. BA. bifariam diuidantur in H. & E. & in Parabola ſit VH. diametro KA. æquidiſtans quæ ſecet parabola in V. & EL. eidem diametro æquidiſtans ſecans Parabolam in L. In Hyperbola vero ducantur ex centro C. rectæ CVH. CLE. ſecantes etiam Hyperbolam in V. & L. manifeſtum eſt ex conuertentibus Conuert. 46. 46. & 47. 1. Conicorum, lineas YVX. & MLN. tan- 47. 1. Conic. gentes ſectiones in V. L. & ipſi DB. PQ. occurrentes in punctis Y. X. & NM. ipſis DA. BA. æquidiſtare: ideoque parallelogramma eſſe XA. NA. quare ductis rectis AV. VD. & AL. LB. erit AVD parallelogrammi XA. & 41. 1. ALB. parallelogrammi NA. dimidium, & ob id maius quam dimidium portionis Parabolæ vel Hyperbolæ quæ

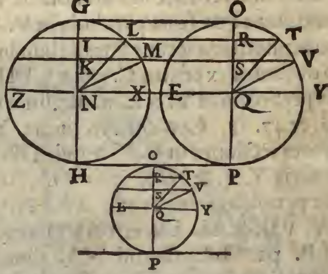
circa

circa ipſum deſcribitur. Atque idem demonſtrabitur in alijs triangulis in infinitum: quod quidem ſemper fiat dum
1. 10. relinquantur quædam ſectionum portiones quæ ſint minores exceſſu S. quo Parabola vel Hyperbola datam magnitudinem Q. ſuperat: rurſus enim vt in priori parte huius ſequetur, Parabolam vel Hyperbolam minori exceſſu differre a polygono inſcripto quam à magnitudine Q. ideoque polygonum eſſe maius data magnitudine Q. Igitur in circulo & coni ſectione poteſt deſcribi &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA II. PROPOS. II.

POteſt ad datum circulum motus æquidiſtanter proportionalis ita fieri, vt partes proportionales incidentium partibus parallelarum proportionalium quæ illas ſecant ſint proportionales.

Inter duas parallelas GO. HP, ducatur incidens perpendicularis GH. circa quam centro N. deſcriptus ſit circulus GLM. ac inter eaſdem parallelas, aut diuerſas HP. CF. ducatur alia incidens perpendicularis OP. moueatur GO. paraλλήλως ipſi HP. ita vt perueniat ad puncta I. & K. in incidente GH. & ad puncta R. S. in incidente OP. quæ eſt inter eaſdem parallelas, ſecetque circulum in punctis L. M. conſtat ex Lemmate 1. huius duas GH. OP. ſecari, a parallelis IR. KS. propor-



tio-

tionaliter: aut ſi non ſit inter eaſdem parallelas, ſint ſectæ GH. OP. in eadem ratione, in I. K. & R. S. ac moueatur GO. parallela ita vt quo tempore G. peruenit in I. etiam O. perueniat in R. & cum illa in K. ita progrediatur in S. Diuiſa bifariam OP. in Q. deſcribatur centro Q. circulus OTV. quem ſecent parallelæ IR. KS. productæ in punctis T. V. & connectantur QT. QV. Item NL. NM. Dico motum lineæ GO. verſus HP. aut linearum GO. HP. eſſe motum ad datum circulum GLM. æquidiſtanter proportionalem, ita vt quæ proportio eſt HI. partis incidentis ad IL. tangentem quæ illam ſecat, eadem ſit PR. partis proportionalis incidentis ad RT. tangentem proportionalem. Cum enim ſit poſitione vt HI. ad IG. ita PR. ad RO. erit componendo vt HG. ad IG. ita PO. ad RO. & antecedentium dimidia, vt NG. ad IG. ita QO. ad RO. & per conuerſionem rationis vt GN. hoc eſt LN. ad NI. ita OQ. id eſt TQ. ad QR. Cum ergo in triangulis LIN. TRQ. anguli ad I. R. ſint recti, ac proinde reliquorum angulorum L. T. vterque minor recto, erunt triangula NIL. QRT. æquiangula anguloſque æquales habebunt ILN. RTQ. & INL. RQT. Erit igitur vt NI. ad IL. ita QR. ad RT. Cum ergo ex hypotheſi ſectæ ſint GH. OP. a parallelis in eadem ratione, erit vt HI. ad IN. ita PR. ad RQ. & vt IN. ad IL. ita oſtenſum eſt eſſe QR. ad RT. igitur ex æquali, vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. atque eodem modo probabimus æquiangula eſſe triangula KNM. SQV. & angulos KMN. SVQ. & KNM. SQV. eſſe æquales, item eſſe vt HK. ad KM. ita PS. ad SV. Cum igitur æquiangula ſint triangula LIN. TRQ. & anguli ad L. T. æquales erit vt NL. id eſt GN. ad LI. ita TQ. id eſt OQ. ad TR. & permutando vt GN. ad OQ. ita IL. ad TR. atque eodem modo ex triangulis æquiangulis NKM. QSV. oſtendemus eſſe vt GN. ad OQ. ita KM. ad SV. ergo vt IL. ad RT. ita KM. ad SV. & permutando vt IL. ad KM. ita RT. ad SV. Cum ergo recta GH. duabus rectis

Corol. 1. 17. 7. 6. 4. 6.

4. 6.

11. 5.

parallelis GO. HP. occurrat, ac ſit diameter circuli intra parallelas contenti, & in eaſdem, aut alias HP. CF. alia recta OP. incidat, moueaturque aut vna parallela GO. aut duæ GO. HP. ex eadem in eandem partem, vt alteri HP. aut CF. ſint continuo parallelæ, diuidantque GH. & OP. in eaſdem rationes, & partes parallelarum IL. KM. parti-
1. defin. huius. bus RT. SV. ſint proportionales, conſtat ex prima definitione huius, motum illum eſſe ad datum circulum inter duas parallelas æquidiſtanter proportionalem, cumque ſit vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. item vt HK. ad KM. ita PS. ad SV. patet id quod proponebatur.

COROLLARIVM.

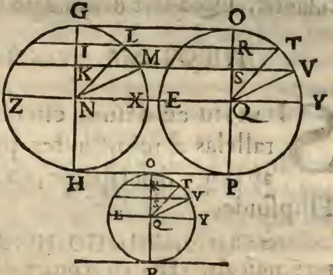
Manifeſtum eſt ex dictis in propoſitione, ſi duo circuli inter duas parallelas æqualiter aut inæqualiter diſtantes deſcripti fuerint, & puncta contactus diameter coniungat, per quæ parallelæ ducantur quarum altera verſus alteram in vtroque circulo ita moueatur vt partes ex diametris eiuſdem rationis abſcindat: primo arcus quos in motu abſcindunt continuo eſſe ſimiles, ſecundo eſſe vt ſinus ſeu chordas arcuum in vno circulo, ita ſinus & chordas in altero circulo; denique eſſe partes incidentium ad partes parallelarum in vno circulo vt in alio: ſeu eſſe ſinus verſos ad ſinus rectos in eadem proportione in vtroque circulo. Nam ex eo quod parallelæ GO. HP. motu ſecent diametros GH. OP. in eaſdem rationes in circulis GLM. OTV. probatum eſt angulos INL. RQT. item KNM. SQV. eſſe æquales, quare arcus GL. OT.
Schol. 22. 3. *item arcus GM. OV. ſimiles ſunt: præterea oſtenſum eſt eſſe vt IL. ad KN. ita RT. ad SV. denique vt HI. ad IL. ita PR. ad RT.*

THEO-

THEOREMA III. PROPOS. III.

SI ad datum circulum motu æquidiſtanter proportionali figura analoga deſcribatur, ita vt partes proportionales incidentium partibus parallelarum proportionalium quæ illas ſecant, ſint proportionales: figura analoga circulus erit.

Sit eadem ſyntheſis quæ in ſuperiori propoſitione, idemque ſchema, nempe inter duas parallelas GO. HP. ducatur incidens perpendicularis GH. circa quam centro N. deſcriptus ſit circulus GLM. ac inter eaſdem parallelas, aut diuerſas HP. CF. ducatur alia incidens perpendicularis OP. Moueatur GO. æquidiſtanter ipſi HP. ita vt perueniat ad quælibet puncta I. K. N. in incidente GH. & ad puncta R. S. Q. in incidente OP. quæ eſt inter eaſdem parallelas,



ſecetque circulum in punctis L. M. X. conſtat ex Lemm. 1. huius duas GH. OP. ſecari a parallelis IK. KS. proportionaliter: aut ſi non ſit inter eaſdem parallelas, ſint rectæ GH. OP. ſectæ eadem ratione in I. K. N. & R. S. Q. &c. moueatur HO. parallela, ita vt quo tempore G. peruenit in I. etiam O. perueniat in R. & cum illa in K. iſta progrediatur in S. cum illa in N. centrum, hæc in Q. & parallelæ

RT. SV. QY. parallelis IL. KM. NX. ſint proportionales, (qui motus primæ definitioni congruit) ſitque vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. & vt HK. ad KM. ita PS. ad SV. (hoc enim fieri poſſe in ſuperiori propoſitione oſtenſum eſt) deſcribaturque figura OTV. Dico figuram OTV. eſſe circulum. Cum enim motu æquidiſtanter proportiona-
1. definit. huius. li ſectæ ſint proportionaliter HG. PO. erit vt NI. ad HI. ita QR. ad PR. ſed vt HI. ad IL ita ſupponitur PR. ad RT. ergo ex æquali vt NI. ad IL. ita QR. ad RT. quare cum re-
6. 6. cti ſint anguli ad IR. æquiangula erunt triangula LNI.
4. 6. TQR. vt igitur LN. ad NI. ita TQ. ad QR. & vt NI. ad
defin. 1. huius. NG. ita QR. ad QO. ex deſcriptione, ergo ex æqualitate,
15. defin. vt LN. ad NG. ita TQ. ad QO. æquales autem ſunt LN. NG. æquales igitur ſunt QT. QO. Atque eadem ratione oſtendentur æquales VQ. QO. & quotquot ex Q. puncto
15. defin. ad perimetrum OTV. ducentur. Igitur figura OTV. circulus eſt. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

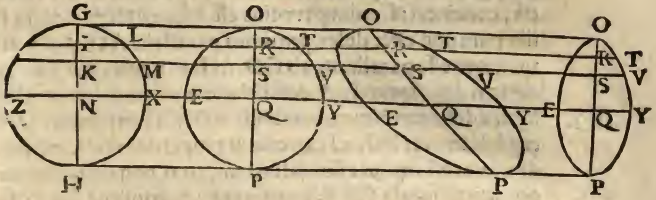
SI motu ad datum circulum inter duas parallelas æquidiſtanter proportionali figura analoga deſcribatur, ea aut circulus erit, aut Ellipſoides.

Inter duas parallelas GO- HP. ducta ſit ad vtramque perpendicularis HG. circa quam deſcriptus ſit centro N. circulus GLM. ac inter eaſdem aut diuerſas parallelas circa incidentem ſecundam OP. motu ad circulum GLM. proportionali deſcripta ſit figura analoga OTV. Dico illam figuram aut eſſe circulum, aut Ellipſoides.

Sit primum incidens OP. peependicularis ad extremas parallelas (vt patet in ſecunda & quarta figura) & ducantur quælibet IL. KM. NX. parallelæ interiores in circulo GLM. quibus in figura OTV. reſpondeant propor-

tionales

tionales parallelæ RT. SV. QY & ſint etiam primo partes 2. huius.



incidentium proportionales, partibus parallelarum proportionalium proportionales, nempe vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. & vt HK. ad KM. ita PS. ad SV. erit figura OTV. cirulus. 3. huius.

Sit ſecundo OP. perpendicularis ad extremas parallelas, ſiue illæ eædem ſint ſiue diuerſæ, ſed partes incidentium proportionales partibus parallelarum proportionalium analogæ non ſint, nempe non ſit vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. Dico figuram OTV. non eſſe circulum. Si enim aliter aſſeratur, ſit ſi fieri poſſit circulus, ergo ex Coroll. ſecundæ huius erit vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. quod eſt abſurdum ponitur enim non eſſe vt HI. ad IL. ita PR. ad RT. Corol. 2. huius.

Denique incidens PO. non ſit ad extremas parallelas perpendicularis ſed obliqua, vt patet in penultimo ſchemate, faciatque cum extremis parallelis angulos non rectos. Dico illam non eſſe circulum. Sit enim ſi fieri poteſt circulus.

Quoniam rectæ PQ. QO. rectis æqualibus HN. NG. proportionales ſunt, etiam inter ſe ſunt æquales, & rectæ EQ. QY. rectis ZN. NX. æqualibus proportionales, etiam ſunt æquales, centrum igitur circuli eſt punctum Q. (ſi enim centrum non eſſet duæ rectæ EY. OP. ſeſe mutuo ſecantes non per centrum extenſæ ſeſe mutuo bifariam non ſecarent, quod eſt abſurdum, cum probatum ſit eas ſeſe bifariam ſecare) eiuſque diameter PO. Rurſus mani- 4. 3.

nife-

nifeſtum eſt figuram analogam OEPY; quæ circulus dicitur, totam intra parallelas AO. CP. quorum motu facta eſt, contineri: ſi enim pats eius eſſet ſupra O. pars infra P. illa pars non eſſet deſcripta motu parallelæ AO. quæ ponitur motu eſſe parallελῶς ab GO. in HP. quod eſt contra rationem deſcriptionis, & definitionem primam huius: igitur
18. 3. figura dicta tangitur a parallelis AO. CP. in punctis O. P. ergo diameter PO. ad extremam tangentem GO. perpendicularis eſt: quod eſſe abſurdum, cum ponatur obliqua; non igitur figura OTV. circulus eſt: ſed quia ea, vt & ſuperiores quæ circuli non ſunt paulatim a puncto O. dilatantur vſque ad parallelam mediam EY. hinc rurſus coarctantur dum in punctum P. deſinant & claudantur, formam ellipſis præſeferunt, quapropter figuram hanc, donec naturam eius explorauerimus, vocabimus *Ellipſoides*.

Igitur ſi motu ad datum circulum &c. Quod erat probandum.

COROLLARIVM.

HInc conſtat ſi motus ſit huiuſmodi qualis deſcribitur tertia huius, figuram analogum eſſe circulum; ſecus nunquam eſſe circulum; & incidente ad extremas parallelas exiſtente obliqua, figuram analogam circulum non eſſe.

SCHOLIVM, AC DEFINITIONES ſecundæ.

FIgura analoga quæ motu ad circulum æquidiſtanter proportionali procreatur, aut Circulus eſt aut Ellipſoides: circulus aut intra eaſdem parallelas aut intra diuerſas: ſi intra eaſdem parallelas producatur, patet eſſe dato æqualem, cum æqualem dato diametrum habeat; ſi intra diuerſas & maior & minor eſſe poteſt. Rurſus ellipſoides aut inter eaſdem parallelas continetur, aut diuerſas; & vtroque modo

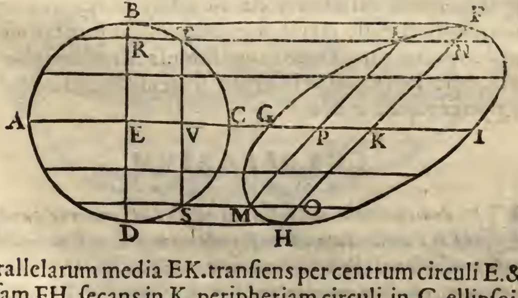
aut

aut incidentem ad extremas parallelas rectam habet, aut obliquam; ac denique parallelas proportionales aut parallelis dati circuli æquales habet, aut inæquales. Ellipſoides cuius incidens ad extremas parallelas recta eſt dicatur Ellipſoides rectum*: id vero cuius incidens obliqua, vocetur* Ellipſoides obliquum. *Si parallelæ proportionales æquales ſint appelletur* Ellipſoides Æquichorde; *ſi inæquales* Diuerſichorde.

THEOREMA V. PROPOS. V.

SI incidenti ſecundæ parallela intra ellipſoides ducatur: ea à parallela media bifariam ſecabitur.

Deſcribatur circulus ABCD. ac ellipſoides quodcumq; FGHI. modo in prima definitione huius tradito; ſiue inter eaſdem parallelas BF. DH. ſiue diuerſas; at ſint primum inter eaſdem, ſitque incidentium prima BD. ſecunda FH. illa diameter circuli ad BF. recta; ita aut recta aut obliqua;



parallelarum media EK. tranſiens per centrum circuli E. & ipſam FH. ſecans in K. peripheriam circuli in C. ellipſoidis in G. ipſi autem FH. parallela ducatur LM. ſecans periocham ellipſoidis in punctis L, M. & parallelam mediam

in

in puncto P. Dico rectam L.M. à recta KE. bifariam ſecari in P. Ducantur per puncta L.M. duæ parallelæ interiores IN. MO. proportionales parallelis in circulo RT. QS. quarum illæ incidentium ſecundam ſecent in N.O. iſtæ circuli diametrum in R. Q. peripheriam in T.S. & iungatur TS. ſecans EK. in V. Quoniam parallelæ ſunt ON.
Definit. 1. huius. ML. ex hypoteſi: item LN.MO. ex definitione prima huius, ſeu deſcriptione ellipſoideos, parallelogrammum eſt
Definit. 35. LMON. quare æqualia ſunt aduerſa latera MO. LN. Sed
34. 1. MO.LN. ſunt parallelæ proportionales ipſis QS. RT. ex definit. 1. huius: æquales igitur ſunt QS. RT. ſed ſunt & parallelæ, ex eadem definit. Igitur etiam parallelæ ſunt
33. 1. BD.TS. Igitur anguli BEV. & TVE. ſunt æquales; ille
29. 1. autem rectus eſt ex definitione 1. huius; quare & iſte rectus eſt, ſecatque EV. rectam TS. bifariam in V. vt au-
3. 3. Lem. 1. huius. tem SV. ad VT. ita MP. ad PL. Igitur etiam recta ML. diuiditur bifariam in P. atque idem demonſtrabitur de qualibet alia parallela ipſi FH.

Sed circulus datus atque ellipſoides analogum non ſint inter eaſdem parallelas. Inter parallelas BF. DH. inter quas ellipſoides deſcribatur, motu ad datum circulum
2.3.& 4. huius. proportionali deſcribitur circulus ABCD. quod ex ſuperioribus fieri poſſe manifeſtum eſt; eodem prorſus modo quo in prima parte huius propoſitionis, demonſtrabimus ML. bifariam ſecari in P. Quare ſi incidenti ſecundæ, &c. Quod erat probandum.

COROLLARIVM.

I. *Ex demonſtratis manifeſtum eſt ſi LM. ponatur parallela ipſi FH. etiam illi reſpondentem TS. eſſe parallelam*
II. *ipſi BD. & cum illa bifariam ſecetur in P. hanc bifariam ſecari in V. cumque æquales ſint PK. LN. item RT. EV. & pro-*
III. *portionales LN. RT. etiam proportionales eſſe PK. EV. ea pro-*
IV. *portione quæ eſt RT. ad LN. Ideoque cum ſit ex hypotheſi vt*

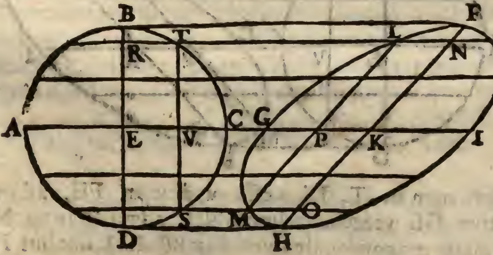
RT.

RT. ad EC. ita LN. ad GK. ac conuertendo & permutando vt EL. totum ad GK. totum, ita RT. id eſt EV. pars ad LN. id eſt KP. partem, & reliquum VC. ad reliquum PG. erit vt totum EC. ad totum KG.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

IN Ellipſoide quolibet incidens ſecunda, & parallelarum media ſunt diametri coniugatæ.

SIT idem ellipſoides quod ſuperiori propoſitione FGHI. in quo incidens ſecundaria, circa quam deſcriptum eſt, ſit FH. parallelarum media GI. intra ellipſoides contenta. Dico FH. GI. eſſe diametros figuræ coniugatas. Nam quia recta FH. diuidit omnes parallelas interiores bifariam, ex definitione prima huius, ſeu ex deſcriptione, defin. 1. huius. erit ipſa diameter ellipſoidis, per 10. definitionem primi defin. 10. 1. Conic. Conicorum Apollonij. Item quia parallela media GI. diuidi omnes parallelas incidentis ſeu diametri FH. bifa- 5. huius.



riam, erit & ipſa, ex eadem definitione, diameter. Inſuper quia vtraque FH. GI. diameter eſt, & FH. parallelas ipſius GI. & GI. parallelas ipſius FH. bifariam ſecat, erunt ex Definit. 17. 1. Conic. definit. 17. 1. Conicorum FH. GI. diametri coniugatæ. Definitio: diameter prima quid, quid ſecunda. Vocetur autem incidens FH. *Diameter prima*: parallela-

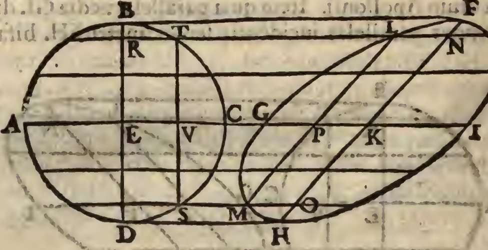
 rum

rum media GI. *Diameter ſecunda*. & punctum K. centrum.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Ellipſoidos diametrum primam quælibet parallelarum interiorum ita ſecat, vt quadratum primæ diametri ad quadratum ſecundæ, ſit vt rectangulum partibus primæ diametri contentum ad quadratum dimidiæ parallelæ interioris primam diametrum ſecantis.

In ſchemate ſuperiorum propoſitionum diametros primas ellipſoidis & circuli FH. BD. ſecet parallela interior RN. illam in N. iſtam in R. illius primetrum in L. iſtius



peripheriam in T. Dico eſſe quadratum FH. ad quadratum GI. vt rectangulum FNH. ad quadratum NL.

Lem. 7. huius. Quoniam proportionales ſunt duæ BR. RD. duabus FN.

7. definit. 6. NH. erunt rectangula BRD. FNH. ſimilia ; & eandem ob cauſam ſimilia erunt rectangula BED. FKH. Item quia proportionales ſunt RD. ED. ipſis NH. KH. a quibus rectilinea BRD. BED. & FNH. FKH. ſimilia ſimiliterque

22. 6. deſcripta ſunt : erit vt rectangulum BRD. ad rectangu-

lum

lum BED. ita rectangulum FNH. ad rectangulum FKH. 1. defin. huius.
Ad hæc quia eſt vt RT. ad EC. ita LN. ad KG. erit vt quadratum RT. ad quadratum EC. ita quadratum LN. ad 22. 6.
quadratum KG. ſed vt quadratum RT. ad quadratum EC. ita rectangulum BRD. ad rectangulum BED. (æqualia enim ſunt rectangula BRD. BED. quadratis RT. EC.) & 35. 3.
vt rectangulum BRD. ad rectangulum BED. ita oſtenſum eſt rectangulum FNH. ad rectangulum FKH. vt igitur qua 11. 5.
dratum LN. ad quadratum GK. ita rectangulum FNH. ad 15. 5. &
rectangulum FKH. id eſt ad quadratum FK. & conſequen- Schol. in 20.
tium quadrupla vt quadratum LN. ad quadratum GI. ita 6.
rectangulum FNH. ad quadratum FH. & conuertendo ac permutando erit quadratum FH. ad quadratum GI. vt rectangulum FNH. ad quadratum LN. Quod erat demonſtrandum.

Quod ſi circulus datus atque ellipſoides analogum non ſint inter eaſdem parallelas: eodem modo quo in quinta huius, inter parallelas BF. DH. inter quas ellipſoides deſcribitur, motu ad datum circulum proportionali deſcri- 2. 3. & 4. hu-
batur circulus ABCD. quod ex ſuperioribus conſtat fieri ius.
poſſe; eadem prorſus ratione qua in prima parte huius propoſitionis demonſtrabimus eſſe vt quadratum FH. ad quadratum GI. ita rectangulum FNH. ad quadratum LN. Quod ad perfectam demonſtrationem addendum erat.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

ELlipſoidos diametrum ſecundam quælibet ordinatim applicatarum ita ſecat, vt quadratum ſecundæ diametri ad quadratum primæ, ſit vt rectangulum ſub partibus primæ diametri, ad quadratum ordinatim applicatæ.

In ſuperiori ſchemate ex quocumque puncto L. ad ſecundam diametrum GI. applicetur ordinatim recta LP.

quæ producta ſecet perimetrum ellipſoideos in M. Dico
eſſe vt quadratum GI. ad quadratum FH. ita rectangulum
Corol. 5. huius. IPG. ad quadratum PL. Quoniam eſt vt EC. ad CV. ita
KG. ad GP. ex Coroll. 5. huius, & antecedentium dupla
AC. ad CV. vt IG. ad GP. erit diuidendo & conuertendo
CV. ad VA. vt GP. ad PI. erunt igitur rectangula CVA.
6. huius. GPI. ſimilia: & cum ſit vt CE. ad EA. ita GK. ad KI. proportio
videlicet æqualitatis, erunt rectangula CEA. GKI.
ſimilia: item quia proportionales ſunt VA. EA. ipſis PI.
KI. vt modo probatum eſt, a quibus rectilinea ſimilia, ſimiliterque
deſcripta ſunt CVA. CEA. in circulo, & GPA.
22. 6. GKI. in ellipſoide: erit vt rectangulum CVA. ad rectangulum
CEA. ita rectangulum GPI. ad rectangulum GKI.
Lemm. 1. huius. præterea quia eſt vt YT. id eſt ER. ad EB. ita PL. id eſt
22. 6. KN. ad KF. erit vt quadratum TV. ad quadratum BE. ita
quadratum LP. ad quadratum FK. ſed vt quadratum TV.
ad quadratum BE. ita rectangulum CVA. ad rectangulum
35. 3. CEA. (æqualia enim ſunt rectangula CVA. CEA. quadratis
TV. BE.) & vt rectangulum CVA. ad rectangulum
11. 5. CEA. ita rectangulum GPI. ad rectangulum GKI. vt igitur
quadratum LP. ad quadratum FK. ita rectangulum GPI.
15. 5. & Schol. in 20. 6. ad rectangulum GKI. id eſt ad quadratum GK. & conſequentium
quadrupla vt quadratum LP. ad quadratū FH.
ita rectangulum GPI. ad quadratum GI. & conuertendo
ac permutando erit quadratum GI. ad quadratum FH. vt
rectangulū IPG. ad quadratum PL. Quod erat probandū.

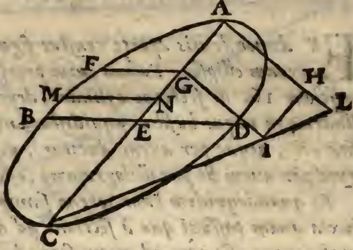
Si vero circulus datus, atque ellipſoides analogum non
ſint inter eaſdem parallelas, idem oſtendetur contingere,
eodem modo quo in fine præcedentis demonſtratum eſt.

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI in linea ellipſoide coniugatæ diametri ſint,
& fiat vt diameter prima, ad ſecundam,
ita ſecunda ad aliam quampiam; quæ à ſectione

ſectione ad diametrum ordinatim applicata eſt poterit ſpatium quod adiacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam quæ inter ordinatim applicatam & ſectionem interijcitur, & deficiens figura ſimili ei quæ diametro ipſa & tertia proportionali continetur.

Sit ellipſoides ABCD. cuius diametri coniugatæ AC. BD. prima AC. ſecunda BD. & fiat vt AC. ad BD. ita BD. ad AL. Apteturque AL. ipſi AC. ad angulos rectos, & iuncta CL. applicetur FG. ordinatim ad BD. & ducatur GI. ipſi AL. æquidiſtans & HI. parallela rectæ AG. Dico quadratum FG. æquale eſſe rectangulo AI. Eſt enim vt quadratum AC. ad quadratum BD. ita recta CA. ad rectam AL. Cum



enim ſint continue proportionales AC. BD. AL. ex conſtructione erit vt quadratum AC. ad quadratum BD. ita CA. ad AL. hoc eſt CG. ad GI. (ſunt enim triangula CAL. CGI. ſimilia ob parallelas GI. AL.) vt autem quadratum AC. ad quadratum BD. ita rectangulum CGA. ad quadratum FG. Quare rectangulum CGA. ad quadratum FG. eſt vt CG. ad GI. Vt autem CG. ad GI. ita rectangulum CGA. ad rectangulum AGI. (poſita enim communi altitudine GA. erit vt CG. ad GI. ita rectangulum CGA. ad rectangulum AGI.) ſeu rectangulum AI. Ergo quadratum FG. æquale eſt rectangulo AI. quod adiacens tertiæ proportionali AL. latitudinem habet AG. & deficit figura LHI. ipſi LAC. ſimili. Vo-

Cor. 20. 6. 4. 6. Corol. 4. 6. 7. huius. 1. 6. 9. 5.

Quid ſit transuerſum figuræ latus, quid rectum.

Vocetur autem AC. tranſuerſum figuræ latus, & AL, latus rectum.

COROLLARIVM I.

EX dictis manifeſtum eſt rectangulum CGA. ad quadratum FG. eſſe vt tranſuerſum figuræ latus AC. ad rectum AL. probatum enim eſt eſſe vt CG. ad GI. ita rectangulum CGA. ad quadratum FG. vt autem CG. ad GI. ita eſt CA. ad AL. vt ergo CA. ad AL. ita rectangulum CGA. ad quadratum FG.

COROLLARIVM II.

Ellipſoides eſt Ellipſis

EX demonſtratis aperte conſtat figuram ellipſoiden eſſe veram ellipſin. Eodem enim prorſus modo Serenus propoſitione 16. de ſectione cylindri, demonſtrat ſectionem cylindri quæ neque baſibus æquidiſtat, neque ſubcontrarie poſita eſt, neque per axem ducitur, neque æquidiſtanter ei quod per axem fit parallelogrammo, eſſe ellipſin.

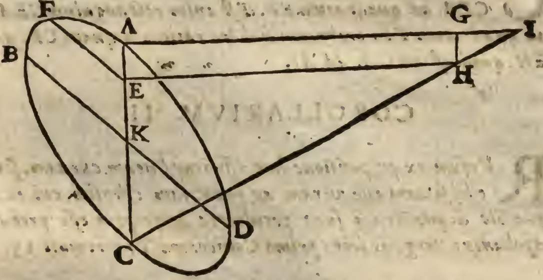
Et quandoquidem cum Sereno ſumimus, in ellipſi lineam iuxta quam poſſunt quæ à ſectione ad diametrum ordinatim applicantur eſſe eam ad quam ſecunda diameter eandem habet rationem quam prima diameter ad ſecundam, id Federicus Commandinus magnus ille Geometra vix vlli antiquorum inferior, demonſtrat in Commentario ad propoſitionem 16. lib. 1. Sereni de ſectione cylindri, ad quem lectorem remittimus.

THEOREMA X. PROPOS. X.

SI in ellipſoide figura coniugatæ diametri ſint, &, fiat vt ſecunda diameter ad primam, ita prima ad aliam lineam: quæ ab ellipſoi-

de ad ſecundam diametrum ordinatim applicatur poterit ſpatium quod adiacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam quæ inter ordinatim applicatam, & ſectionem interijcitur, & deficiens figura ſimili ei quæ ſecunda diametro & tertia proportionali inuenta continetur.

Sit ellipſoides ABCD. & fiat vt AC. ſecunda diameter ad DB. diametrum primam ita DB. ad AI. ponaturque AI. ad angulos rectos ipſi AC. deinde ad AC. ordinatim ap-



plicetur FE. & ducatur EH. ipſi AI. æquidiſtans, HG. vero æquidiſtans ipſi EA. Dico quadratum EF. parallelogrammo AH. æquale eſſe. Hoc eodem pene modo demonſtrabitur quo priori propoſitione. Quoniam enim vt quadratū AC. ad quadratum BD. ita linea CA. ad AI. (ſunt enim in continua proportione CA. BD. AI. ideoque vt quadratum AC. ad quadratum BD. ita AC. ad AI.) hoc eſt CE. ad EH. (ſunt enim duo triangula CAI. CEH. ob parallelas AI. EH. ſimilia) & per 8. huius eſt vt quadratum AC. ad quadratum BD. ita rectangulum CEA. ad quadratum EF. Quare rectangulum CEA. ad quadratum EF.

Corol. 20. 6.
4. 6.
Corol. 4. 6.
8. huius.

EF. eſt vt CE. ad EH. vt autem CE. ad EH. ita rectangulum CEA. ad rectangulum HEA. (poſita enim communi altitudine AE. erit vt CE. ad EH. ita rectangulum
1. 6. CEA. ad rectangulum HEA.) ergo quadratum EF. æquale eſt rectangulo AH. quod adiacens tertiæ proportionali AI. latitudinem habens AE. & deficiens figura GHI. ſimili ei quæ CEH. continetur. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM. I.

Conſtat ex dictis eſſe vt CA. ad AI. ita rectangulum CEA. ad quadratum EF. Eſt enim rectangulum CEA.
4. 6. *ad quadratum EF. probatum habere rationem quam CE. ad EH. quod eſt vt CA. ad AI.*

COROLLARIVM. II.

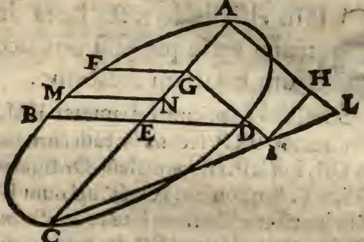
Ellipſoides eſt ellipſis.

Rurſum ex propoſitione hac efficitur lineam curuam, ſeu ellipſoidem eſſe veram ac genuinam ellipſim, cui ea quæ hic demonſtrata ſunt peculiaria ac propria eſſe probat Apollonius Pergæus libro primo Conicorum Theoremate 15.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI in ellipſoide rectæ lineæ ad diametrum ordinatim applicentur: erunt quadrata earum ad ſpatia contenta lineis quæ inter ipſas & terminos tranſuerſi lateris figuræ interponuntur, vt rectum figuræ latus ad tranſuerſum; inter ſe vero vt ſpatia quæ lineis ſimiliter ſumptis continentur.

In ſchemate nonæ huius. Sit ellipſoides ABCD. cuius diameter ac tranſuerſum figuræ latus AC. rectum AL. & ad ipſam AC. ordinatim applicentur FG. MN. Dico quadratum FG. ad rectangulum AGC. eſſe vt LA. ad AC. & quadratum FG. ad quadratum MN. eſſe vt rectangulum AGC. ad rectangulum ANC. Quoniam enim



eſt vt quadratum ſecundæ diametri BD. ad quadratum primæ diametri AC. ita quadratum FG. ad rectangulum AGC. & AL. latus tranſuerſum ad AC. erit vt latus rectum ad tranſuerſum, ita FG. quadratum ad rectangulum AGC. Eodemque modo oſtendetur eſſe vt latus rectum ad tranſuerſum ita, quadratum MN. ad rectangulum ANC. Erit igitur vt quadratum FG. ad rectangulum AGC. ita quadratum MN. ad rectangulum ANC. & permutando. Quod erat demonſtrandum.

8. huius.

Coroll. 1. 9. huius.

11. 5.

COROLLARIVM.

TErtium hoc ſymbolum eſt, figuram curuam, de qua agimus eſſe ellipſin; Nam hanc ellipſis proprietatem cum circulo tamen ac hyperbola cõmunem demonſtrauit Apollonius lib. 1. Conic. prop. 21. Cum vero conſtet hanc figuram neque circulum eſſe, neque hyperbolen, conſequitur vt ellipſis exiſtimanda ſit.

Ellipſoides eſſe ellipſim.

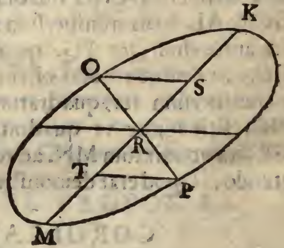
Atque his tribus notis contentus fuit Serenus vt ſectionem cylindri ellipſin eſſe probaret, cum tamen aſſereret multo plures ex elementis conicis peti poſſe. Nos adhuc quar-

tam addemus quæ non obſcure propoſitum efficiet.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI in ellipſoide recta linea ducatur per centrum vtrinque ſectioni occurrens ad centrum bifariam ſecabitur.

Sit ellipſoides cuius diameter KM. centrum R. & per R. ducatur ORP. ſecans lineam curuam in punctis OP. Dico OR. ipſi RP. eſſe æqualem. Ordinatim enim applicentur
Coroll. 1. ad 9. huius. OS. PT. & quoniam vt rectangulum KTM. ad quadratum
Coroll. 1. ad 9. huius. TP. ita eſt tranſuerſum latus ad rectum, & vt rectangulum MSK. ad quadratum SO. ita tranſuerſum latus ad rectum, erit vt rectangulum KTM. ad quadratum TP. ita rectangulum MSK. ad quadratum SO. vt autem
22. 6. quadratum TP. ad quadratum TR. ita quadratum SO. ad quadratum SR. (nam æquiangula ſunt, imo æqualia triangula PTR. OSR. ob æquales angulos ad verticem R.
15. 1. 29. 1. & alternos ad S. & T. item ad P. & O. æquales, cum parallelæ ſint ex deſcriptione OS. TP.) erit ex æquali vt rectangulum KTM. ad quadratum TR. ita rectangulum MSK. ad quadratum SR. & componendo, vt rectangulum KTM. vna cum quadrato TR. ad quadratum TR. hoc eſt quadratum MR. ad quadratum RT. (etenim recta MK. ſecatur bifariam in R. &
5. 2. in partes inæquales ad punctum T. ideoque rectangulum KTM. ſub inæqualibus ſegmentis KT. TM. vna cum quadrato TR. intermediæ ſectionis eſt æquale quadrato dimi-



diæ

diæ MR.) ita rectangulum MSK. vna cum quadrato SR. ad quadratum SR. id eſt (per eandem quintam ſecundi elementorum) quadratum KR. ad quadratum SR. & permutando vt quadratum MR. ad quadratum KR. ita quadratum TR. ad quadratum RS. Quare vt MR. ad RK. 22. 6.
ita TR. ad RS. eſt autem recta MR. rectæ RK. æqualis, ex deſcriptione: quare recta TR. rectæ RS. æqualis exiſtit, vt 4. 6.
autem TR. ad RS. ita PR. ad RO. (æquiangula enim oſtenſa ſunt triangula TRP. RSO.) Quare PR. & RO. ſunt æquales. Quod erat propoſitum. Hanc autem ellipſeos proprietatem demonſtrat Apollonius.

SCHOLIVM.

HActenus quatuor veluti teſſeras exhibuit Ellipſoides noſtrum quibus ſeſe genuinam ellipſin probaret, vt inter acutanguli coni ſectiones reciperetur, tres quidem ex Sereni penu, quartam ex noſtra officina depromptam; ſed vereor ne ſi illæ lynceis ſcupuloſi cuiuſpiam Geometræ oculis diſpiciantur non ſatis legitimæ videri poſſint, ac ſuſpicionem mouere poſſint vſurpati nominis tam a noſtra figura, quam a ſectione cylindri apud Serenum & Archimedem de Conoidibus, & Sphæroidibus. Eſto enim notæ quas Serenus, quas nos adduximus ellipſi conueniant, dubitare quis poterit num ſoli, & vtrum κυριώσιδια *ſint* καὶ ἀντιςρέφοντα, *an vero vt in Scholis loquuntur propria tantum primo modo: certe pleræque omnes affectiones quæ in libris conicorum Ellipſi ineſſe demonſtrantur, etiam circulo, multæ hyperbolæ & oppoſitis ſectionibus conueniunt; neque ſi circuli ac ellipſeos differentia ignota eſſet, recte quis argueret ex affectionibus quas circulus cum ellipſi communes habet illum eſſe ellipſin. Quis nouit num ſectio Cylindri, num Ellipſoides noſtrum communione quidem dictorum ſymbolorum iungatur cum Ellipſi, natura tamen ab ea non minus quam circulus aut oppoſitæ ſectiones, differat? Scitum eſt apud Dialecticos propoſitionem*

vniuerſalem affirmantem non ſimpliciter ſed per accidens tantum conuerti in particularem aientem. Nec enim ſi omnis homo animal eſt ideo omne animal eſt homo, neque efficitur ſi omnis ellipſis hoc habet vt prima diameter ſectionis ad ſecundam eam rationem habeat quam ſecunda ad aliam quampiam, quæ ad ſecundam applicata ordinatim poſſit ſpatium quod adiacet tertiæ proportionali, & reliqua quæ in quinta huius demonſtrata ſunt, vt ideo quicquid hoc habet protinus ſit ellipſis; Quare cum huiuſmodi ſigna occurrunt, plerumq; peritiores Mathematici vtuntur ἀπαγωγῇ εἰς ἀδύνατον *ſeu abductione ad abſurdum qua certo ſtatuunt id de quo dubitabatur; quæ demonſtratio licet* δεικτικῆ *minus ſit* ἐπιστημονικὴ, *ac dignitate concedat, veritate tamen ac certitudine ne hilum quidem inferior eſt.*

Nos igitur ſuperioribus notis vſi ex contraria aſſertione manifeſtum abſurdum deriuabimus, atque ita totam rem extra omnem dubietatis aleam conſtituemus.

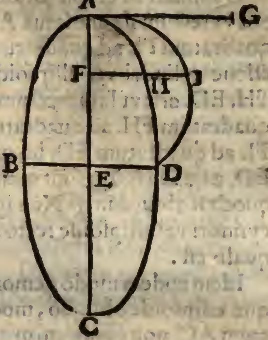
THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

PRopoſitum ſit verè demonſtrare, ſectionem cylindri quæ neque baſibus æquidiſtat, neque ſubcontrarie poſita eſt neque per axem, neque æquidiſtante ei quod per axem fit parallelogrammo; item Ellipſoides quodcũq; eſſe Ellipſin.

Sit primum ſectio cylindri cuiuſdmodi poſita eſt in propoſitione, & Ellipſoides quodcumque rectum ABCD. cuius prima diameter ſeu axis AC. ſecunda diameter ſeu axis BD. fiatque vt AC. ad BD. ita BD. ad aliam videlicet AG. quæ ſtatuatur ipſi AC. ad angulos rectos, erit (ex ijs quæ demonſtrat Federicus Commandinus commentario in 16. propoſit. Sereni de ſectione cylindri, quod etiam ſe demonſtraſſe affirmat Serenus in Commentarijs ſuis in

Command. in 16. 1. Sereni.

Apol-



Apollonium, quæ ad nos non peruenerunt) AC. tranſuerſum figuræ latus, & AG. rectum, ſeu recta iuxta quam poſſunt quæ a ſectione ad diametrum ordinatim applicantur. Iam vero per primam partem 54. 1. in ſubiecto plano deſcribatur ellipſis ita vt eius diameter ſit AC. vertex A. & rectum latus AG. ductæ vero a ſectione ad AC. in angulo recto applicentur, quæ latitudines habeant lineas interiectas & punctum A. deficiantque figura ſimili & ſimiliter poſita ei quæ lineis CA. AG. continetur: & diuiſa AC. bifariam in E. ducatur ſecunda ſeu axis BD. faciens angulos rectos cum BC. Hinc Ellipſis dicta ſectioni cylindri aut ellipſoidi recto ſuperimponatur, & congruat AC. ellipſis cum diametro AC. ſectionis cylindri aut ellipſoideos recti ipſis æquali: congruet etiam angulus rectus CAG. cum recto, & AG ellipſis cum æquali AG. ſectionis, aut ellipſoidis recti & recta BD. cum BD. & cum centro centrum E. (Nam cum ſint æquales EA. AG. tam in ellipſi quam in cylindri ſectione, & ellipſoide recto, & inter eas media proportionalis BD. erit BD. ellipſis æqualis BD. ſectionis) Ergo aut ellipſis cum ſectione, vel ellipſoide congruet, aut certe non congruet: Dicatur primum non congruere; igitur ab illa deficiet, deficiat igitur ad puncta H. I. ductaque FHI. ordinatim applicata ad diametrum AC. ſecet ſectionem cylindri vel ellipſoides & ellipſim in punctis H. I. ita vt arcus AID. ſit arcus ellipſis & AHD. arcus ſectionis cylindricæ, vel Ellipſoidis.

54.1. Conicorum.

Quo-

21.1.Coni-corum. Quoniam in ellipſi ordinatim applicatæ ſunt ED. FI. erit vt rectum figuræ latus AG. ad tranſuerſum AC. ita quadratum FI. ad quadratum ED. Rurſus quoniam in ſectione cylindri vel ellipſoide ordinatim applicatæ ſunt 18.1. Sereni de ſect. cylindri. FH. ED. erit vt latus rectum AG. ad tranſuerſum AC. ita quadratum FH. ad quadratum ED. Vt igitur quadratum 11. 5. FI. ad quadratum ED. ita quadratum FH. ad quadratum ED. æqualia igitur ſunt quadrata FH. FI. pars & totum: quod eſt abſurdum. Non igitur deficit ellipſis a ſectione cylindri vel ellipſoide recto: conuenit ergo: quare illi æ- 8. pronunc. qualis eſt.

Idem eodem modo demonſtrabimus etiam in quocumque ellipſoide obliquo, modo ductæ a ſectione ad diametrum AC. non applicenrur ad angulos rectos, ſed ad angulos æquales ijs quos applicatæ cum diametro efficiunt in ellipſoide obliquo; & per ſecundam partem 54. 1. Conicorum deſcribatur ellipſis, vt dictum eſt prima parte huius, cuius diametet AC. vertex A. rectum latus AG. idem quod in Ellipſoide, ac fiat impoſitio vtriuſque figuræ: idem enim abſurdum ſequetur ſi illæ non dicantur congruere. Igitur vere demonſtratum eſt ſectionem Cylindri quæ neque baſibus æquidiſtat, neque ſub contrarie poſita eſt, neque per axem, neque æquidiſtante ei quod per axem fit parallelogrammo, item ellipſoides quodcumque eſſe ellipſin.

SCHOLIVM.

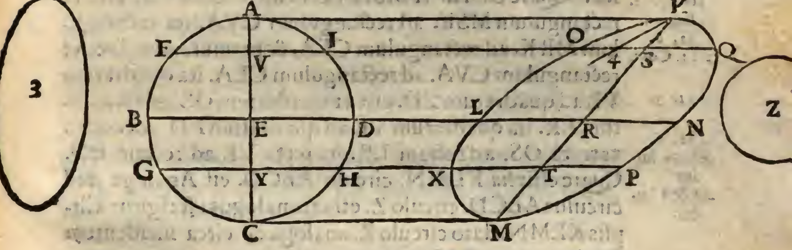
M*Vtato igitur nomine Ellipſodea dicantur* Ellipſei Analogæ; *quarum alia vocentur* Rectæ *aliæ* obliquæ: *aliæ* Æquichordes; *aliæ* Diuerſichordes: *iiſdem ſcilicet cognominibus quibus Ellipſoidea in Scholio quarta huius diſtinximus.*

THEO-

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

QVælibet ellipſis circa quamlibet ſuarum diametrorum dato circulo, dataque ellipſi eſt analoga.

Datus ſit circulus quilibet Z. & ellipſis 3. & ſit quælibet ellipſis KLMN. cuius quælibet diameter KM. centrum R. Dico ellipſim KLMN. circa diametrum KM. dato circulo Z. aut ellipſi 3. eſſe analogam. Ducantur per puncta K.M. rectæ KA. MC. ellipſim KLMN. contingentes; quoniam Lemm. 4. huius.



recta KM. tranſit per centrum R. ellipſis, cum ponatur eius diameter, rectæ KA. MC. ſibi ipſis æquidiſtabunt. Inter 27. 1. Coni. duas parallelas KA. MC. ducta ad vtramque perpendiculari AC. deſcribatur circulus ABCD. & & mota AC. motu ad MC. æquidiſtanti faciat parallelas in vtraque figura FVI. OSQ. & BED. LRN. & GYH. XTP. quæ ſecentur illic ab AC. in punctis V. E. Y. iſtic a KM. in punctis S. R. T. Conſtat in circulo parallelas dictas ſecari bifariam in punctis V. E. Y. In ellipſi vero KLMN. cum recta 3. 3. LRN. tranſeat per centrum R. ſecabitur in R. bifariam 30. 1. Coni. ſed & OSQ. bifariam ſecatur in S. ſi enim non; ſecetur

bifa-

biſariam in puncto 4. & ducatur K4. quoniam ellipſim KLMN. contingit KA. in puncto A. & huic æquidiſtans
7. 2. Coni. O4Q. diuiſa eſt biſariam in puncto 4. erit K4. diameter ellipſis, quod eſt abſurdum cum non tranſeat per centrum; atque eodem modo probabitur rectam XP. & quamlibet
12. definit. parallelarum ad LN. ſecari biſariam a diametro KM. or-
1. Conic. dinatim igitur applicantur ad diametrum KM. rectæ
21. 1. Coni. OS. LR. XT. &c. Ergo erit vt rectangulum MSK. ad rectangulum MRK. ita quadratum OS. ad quadratum LR. & vt rectangulum MSK. ad rectangulum MRK. ita rectangulum CVA. ad rectangulum CEA. (nam cum ſit vt MS.
Lemm. 1. huius. ad SK. ita CV. ad VA. erunt rectangula MSK. MVA. ſimilia, & ob eandem cauſam rectangula MRK. MEA. ſimi-
1. defin. 6. Lemm. 1. huius. lia. Quare cum ſit vt MS. ad CV. ita MR. ad CE. erit vt rectangulum MSK. ad rectangulum CVA. ita rectangu-
22. 6. 21. 1. Coni. lum MRK. ad rectangulum CEA. & permutando) & vt rectangulum CVA. ad rectangulum CEA. ita quadratum
11. 5. VI. ad quadratum ED. erit vt quadratum OS. ad quadratum LR. ita quadratum VI. ad quadratum ED. ideoque
22. 6. vt recta OS. ad rectam LR. ita recta VI. ad rectam ED.
defin. 4. huius. Quare ellipſis KLMN. circulo ABCD. eſt Analoga, ſed
2. 3. & 4. huius. circulus ABCD. circulo Z. etiam analogus eſt: igitur ellipſis KLMN. dato circulo Z. analoga eſt circa incidentem ſeu diametrum KM.

Rurſus quia ellipſis 3. ex prima parte huius propoſitionis, circulo Z. analoga eſt circa quamlibet ſuarum diametrorum, & eidem circulo analoga eſt ellipſis KLMN. circa quamlibet ſuarum diametrorum, manifeſtum eſt ellipſes KLMN. & 4. circa quamlibet ſuarum diametrorum deſcriptas eſſe analogas. Quare quælibet ellipſis circa quamlibet &c. Quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA XV. PROPOS. XV.

SI motu ad datam Ellipſin æquidiſtanter proportionali figura deſcribatur; ea aut Circulus erit, aut Ellipſis.

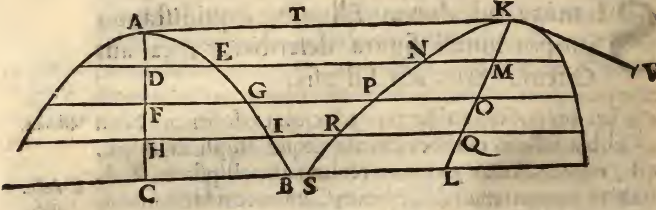
Hæc propoſitio euidenter deducitur ex ſuperiori. Nam quælibet ellipſis cuilibet circulo atque ellipſi analoga eſt, ergo motu ad datum circulum aut ellipſin æquidiſtanter proportionali deſcribitur; Cum autem idem ſit motus quo circulus aut ellipſis data, & ellipſis analoga deſcribuntur; ſi ellipſis analoga ſtatuatur prima atque data; manifeſtum eſt circulum aut ellipſin, quæ data erat, motu æquidiſtanter proportionali delineari ac fieri analogam. Quod erat probandum. 14. huius. 4. defin. huius.

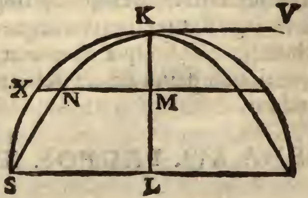
THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

SI ad datam Parabolam motu æquidiſtanter proportionali figura analoga deſcribatur, ea erit Parabola.

Inter eaſdem aut diuerſas parallelas AK. CL. data ſit parabola ABC. cuius diameter AC. latus rectum AT. & incidens ſecunda quæcumque KL. moueatur AK. æquidiſtanter ipſi CL. ita vt continuò parallelæ circa KL. ſint proportionales parallelis circa AC. nimirum vt NM. ad PO. ita DE. ad FG. & vt PO. ad RQ. ita FG. ad HI. & vt RQ. ad SL. ita HI. ad CB. atque ita deinceps etiam ex alia parte incidentium; ſecabuntur etiam AC. KL. proportionaliter, ideoque iuxta primam definitionem huius, erit motus ad datam parabolam æquidiſtanter proportionalis: Deſcribatur eo motu figura KSL. quæ erit analoga parabolæ ABC. Dico illam figuram eſſe parabolam. Quo- Lemm. 1. huius. 1. defin. huius. 4. defin. huius.

Lem. 1. & definit. 1. huius. niam ſectæ ſunt proportionaliter DK. FA. in punctis M. D. erit vt OK. ad MK. ita FA. ad DA: item quia parabola





20. 1. Conic. Definit. 1. huius. 22. 6. eſt ABC. erit vt FA. ad DA. ita quadratum FG. ad quadratum DE. Rurſus quia proportionales ſunt rectæ DE. FG. rectis NM. PO. erit vt quadratum FG. ad quadratum DE. ita quadratum PO. ad quadratum NM. ergo a primo ad vltimum vt recta OK. ad rectam MK. (nempe vt lineæ quæ ob ordinatim applicatis ex diametro ad verticem abſcinduntur) ita quadratum PO. ad quadratum NM. nimirum ita ſunt inter ſe quadrata ordinatim applicatarum, quod tanquam parabolæ peculiare demonſtrat Apollonius lib. 1. Conic. propoſit. 20.

Rurſus quadrato NM. fiat rectangulum MKV. æquale & ipſi LK. ſit KV. ad punctum K. perpendicularis. Quoniam rectangula MKV. OKV. eandem altitudinem habent K. erunt vt baſes MK. OK. ſed vt MK. ad OK. ita

1. 6.

paulo

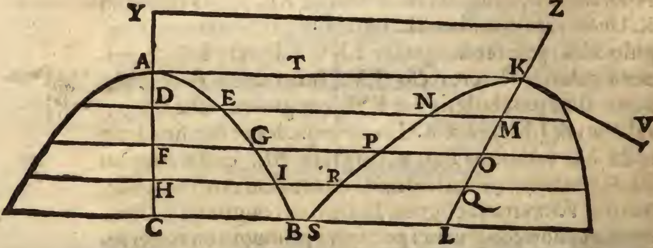
paulo ante oſtenſum eſt quadratum MN. ad quadratum OP. vt igitur rectangulum MKV. ad rectangulum OKV. ita quadratum NM. ad quadratum PO. & permutando vt rectangulum MKV. ad quadratum NM. ita rectangulum OKV. ad quadratum PO. æquale autem eſt rectangulum MKV. quadrato NM. ex hypotheſi, igitur æquale erit rectangulum OKV. quadrato PO. atque ita rectangulum QKV. erit æquale quadrato RQ. &c. Quod parabolæ conuenire demonſtrat Apollonius 11. primi Conicorum vocatque KV. Rectum figuræ latus. 11.1.Conic.

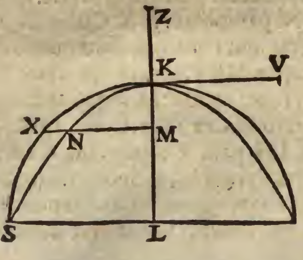
Iam vero oonſtat ex 52. primi Conicorum poſſe inueniri parabolam, cuius diameter ſit data KL. vertex punctum K. Ducta vero quælibet SL. à ſectione ad diametrum in angulo SLK. poſſit rectangulum LKV. ſub recta LK. & perpendiculari ſeu latere recto KV. Inuenta iam ſit & imponatur dicta parabola figuræ KSL. congruent rectæ LK. parabolæ, & LK. figuræ KSL. cum æquales poſitæ ſint. Item rectæ SL. vtriuſque figuræ, cum tam SL. quam angulus SLK. ponantur æqualia: deniq; ob eandem cauſam conuenient KV. in vtraque figura. Igitur, aut congruent dictæ figuræ, aut non congruent: ponantur primum non congruere, ac vbi deficiunt applicetur ordinatim MNX. quæ ſecet figurã analogam in N. parabolam in X. Quoniam in vtraque figura KV. eſt recta iuxta quam poſſunt ordinatim applicatæ; erit rectangulum MKV. æquale quadrato MN. ex ſecunda parte huius propoſitionis: idemque rectangulum MKV. æquale quadrato MX. ex 11. 1. Conic. Igitur æqualia ſunt quadrata LI. LH. pars & totum: quod eſt abſurdum: congruent igitur Parabola, & figura analoga. Igitur æqualia ſunt, ac in vnam figuram coincidunt, eſtque figura analoga KSL. Parabola. Quod erat demonſtrandum. 11.1.Conic. 2. parte huius. 11.1.Conic. 9. 5. 8.pron.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

SI ad datam Hyperbolam motu æquidiſtanter proportionali figura analoga deſcribatur; ea erit Hyperbola.

Sit idem ſchema quod ſuperiori propoſitione, ſed figura ABC. ponatur eſſe Hyperbola, & fiant reliqua vt in præcedenti, tantum Hyperbolæ ABC. accipiatur tranſ-





uerſum latus AY. & ducta YZ. ipſi AK. parallela producatur LK. dum concurrat cum YZ. in puncto Z. Dico figuram analogam KSL. eſſe Hyperbolam; Eſt enim vt YD.

Lemm. 2. huius.

ad

ad DF. ita ZM. ad MO. & componendo, & per conuerſionem rationis ac permutando vt YF. ad ZO. ita YD. ad ZM. ſed eſt etiam vt YF. ad FA. ita ZO. ad OK. & vt YD. ad DA. ita ZM. ad MK. ſimilia igitur ſunt rectangula YFA. ZOK. item rectangula YDA. ZMK. cum igitur ſit vt YF. ad ZO. ita YD. ad ZM. & ſuper prima ac ſecunda facta ſint duo rectangula ſimilia YFA. ZOK. & ſuper tertia & quarta duo itidem ſimilia YDA. ZMK. erit vt rectangulum YFA. ad rectangulum ZOK. ita rectangulum YDA. ad rectangulum ZMK. & permutando vt rectangulum YFA. ad rectangulum YDA. ita rectangulum ZOK. ad rectangulum ZMK. ſed vt rectangulum YFA. ad rectangulum YDA. ita quadratum FG. ad quadratum DE. & vt quadratum FG. ad quadratum DE. ita quadratum PO. ad quadratum NM. igitur vt rectangulum ZOK. ad rectangulum ZMK. ita quadratum PO. ad quadratum NM.

Lemm. 1. huius. — 22. 6. — 21.1. Conic. — 22. 6.

Deinde fiat vt rectangulum ZMK. ad quadratum MN. ita ZK. ad KV. Quoniam oſtenſum eſt prima parte huius, eſſe rectangulum ZOK. ad rectangulum ZMK. vt quadratum PO. ad quadratum MN. erit conuertendo & permutando vt rectangulum ZMK. ad quadratum MN. id eſt vt ZK. ad KV. ita rectangulum ZOK. ad quadratum PO. Atque eodem modo probabimus eſſe vt ZK. ad KV. ita rectangulum ZQK. ad quadratum QR. Has affectiones etiam in Hyperbola demonſtrat Apollonius I. Conic. prop. 21.

Corol. 20. 6.

Conſtat autem ex 53. 1. Conicorum poſſe inueniri Hyperbolam cuius latus rectum KV. tranſuerſum KZ. & diameter KL. ducta vero quælibet SL. a ſectione ad diametrum in angulo SLK. ſit vt ZK. ad KV. ita rectangulum ZLM. ad quadratum SL. Inuenta iam ſit & imponatur dicta Hyperbola figura XSL. congruent rectæ LK. Hyperbolæ, & LK. figuræ, cum æquales poſitæ ſint: Item rectæ SL. vtriuſque figuræ, cum tam rectæ SL. quam anguli SLK. ponantur æquales: denique ob eandem cauſam con-

uenient

uenient KV. in vtraque figura. Congruent ergo dictæ figuræ, aut minime congruent. Ponuntur primum non congruere, ac vbi deficiunt applicetur ordinatim MNX. quæ ſecet figuram analogam in N. Hyperbolam in X. Quoniam in vtraque figura KV. eſt recta iuxta quam poſſunt ordinatim applicatæ, ZK. latus tranſuerſum, erit ex ſecunda parte huius propoſitionis, vt ZK. ad KV. ita re-
21.1.Conic. ctangulum ZMK. ad quadratum MN.& vt ZK. ad KV. ita
9. 5. rectangulum ZMK. ad quadratum MX. æqualia igitur ſunt quadrata MN. MX. pars & totum. Quod eſt abſurdum congruent igitur Hyperbola ac figura Analoga, æquales ergo ſunt; immo in vnam figuram concidunt, vt proinde figura analoga KSL. ſit Hyperbola. Quod erat demonſtrandum.

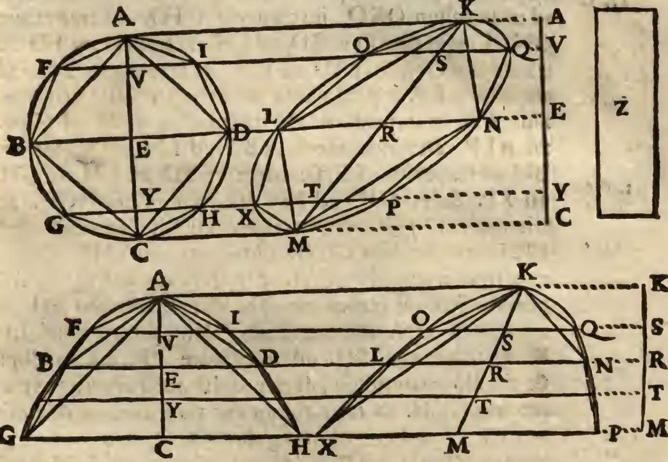
THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

Polygona in Circulo atque Ellipſi analoga; item in Parabolis aut Hyperbolis analogis intra eaſdem parallelas ſimiliter inſcripta ſunt inter ſe vt parallelæ proportionales.

Inter eaſdem parallelas AK.CM.deſcriptus ſit circulus ABCD. & Ellipſis analoga KLMN.item duæ aut parabolæ, aut Hyperbolæ analogæ AC. KM. quorum diametri ſecundæ BD. LN. eaque ſecent quotcumque parallelæ proportionales illum FI.BD.GH.iſtam OQ. LN.XP.connectantur rectis ſibi reſpondentibus AF. FB. BG. &c. & KO. OL. LM. &c. quæ efficient duo polygona in circulo, & ellipſi ſimiliter deſcripta, eo modo quo definitione quinta huius traditum eſt. Dico polygonum AFBGCH DI. ad polygonum KOLXMPNQ. eſſe vt proportionalem quamcumque FI. ad proportionalem OQ. Secet diameter AC. rectas FI. BD. GH. in punctis VEY. erit AV. altitudo tam trianguli FAI. quam trianguli OKQ. eo

quod

quod ſint inter eaſdem parallelas: itemque recta VE. erit altitudo trapeziorum FD. ON. & EY. altitudo trape-



ziorum BH. LP. denique YC. altitudo triangulorum in circulo & ellipſi, & in parabola, & Hyperbola vltimorum trapeziorum GCH. XMP. Quoniam igitur triangula FAI. OKQ eandem habent altitudinem, erunt inter ſe vt baſes, quare vt FI. ad OQ. ita triangulum FAI. ad triangulum OKQ. Rurſus quia trapezia FD. ON. habent latera FI. BD. proportionalia lateribus OQ. LN. erunt inter ſe vt rectangula ſub BD. EV. & ſub LN. EV. ſed rectangula ſub BD. EV. & LN. EV. ſunt inter ſe vt baſes BD. LN. vt igitur BD. ad LN. ita trapezium FD. ad trapezium ON. eodem modo oſtendemus eſſe vt GH. ad XP. ita trapezium BH. ad trapezium LP. &

1. 6.

36.4. huius.

1. 6.

trian-

triangulum GCH. ad triangulum XMP. Cum igitur ſit vt FI. ad OQ. ita triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ſit autem vt FI. ad OQ. ita BD. ad LN. & vt BD. ad LN. ita trapezium FD. ad trapezium ON. erit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita trapezium FD. ad trapezium ON. Rurſus cum ſit vt BD. ad LN. ita trapezium FD. ad trapezium ON. & vt BD. ad LN. ita trapezium BH. ad trapezium LP. vt paulo ante probatum eſt, erit vt trapezium FD. ad trapezium ON. ita trapezium BH. ad trapezium LP. Denique cum ſit vt BD. ad LN. ita trapezium BH. ad trapezium LP. ſit autem vt BD. ad LN. ita GH. ad XP. & vt GH. ad XP. ita triangulum GCH. ad triangulum XMP. erit vt trapezium BX. ad trapezium LP. ita triangulum GCH. ad triangulum XMP. Quare cum ſit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita trapezium FD. ad trapezium ON. & vt trapezium FD. ad trapezium ON. ita trapezium BH. ad trapezium LP. & vt trapezium BH. ad trapezium LP. ita in ellipſi & circulo triangulum, in parabolis aut Hyperbolis trapezium GCH. ad triangulum aut trapezium XMP. erit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita totum polygonum AFBGCHDI. ad totum polygonum KOLXMP NQ. ſed vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita oſtenſum eſt eſſe FI. ad OQ. Vt igitur FI. ad OQ. parallela proportionalis ad proportionalem ita polygonum AFBG CHDI. ad polygonum KOLXMPNQ. Quod erat demonſtrandum.

[Margin notes: defin. 1. huius. / 11. 5. / 11. 5. / 1. definit. huius. / 11. 5. / 11. 5.]

COROLLARIVM

Ex dictis conſtat polygona in circulo atque ellipſi analoga inter eaſdem parallelas ſimiliter deſcripta eſſe vt ſecundas diametros. Nam vt FI. ad OQ. ita polygonum ad polygonum. ſed vt FI. ad OQ. ita diameter ſecunda BD. ad ſecundam LN. Vt igitur BD. ad LN. ita polygonum ad polygonum.

[Margin note: 1. defin. huius.]

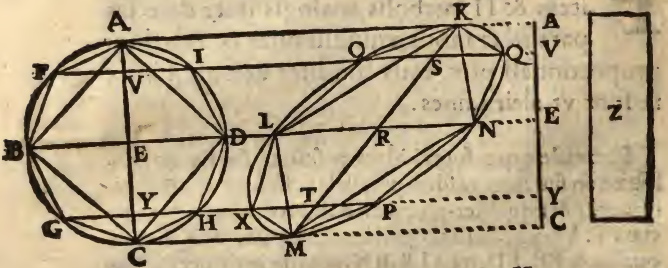
THEO-

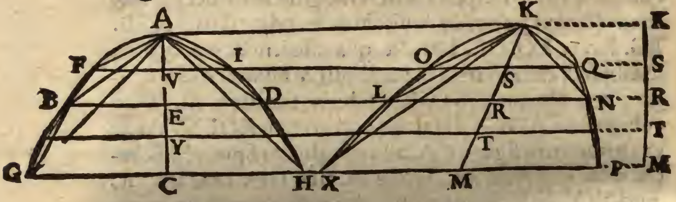
THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

Polygona in Circulo atque Ellipſi : Parabolis item & Hyperbolis analogis inter diuerſas parallelas motu æquidiſtanter & æqualiter proportionali procreatis ſimiliter deſcripta inter ſe ſunt vt altitudines.

Sint eadem quæ ſuperiori propoſitione, ſed figuræ analogæ non ſint inter eaſdem parallelas, ſintque motu æquidiſtanter & æqualiter proportionali procreatæ, ita vt rectæ FV. VI. parallelis proportionalibus OS. SQ. ſint æquales, & BE. ED. ipſis LR. RN. atq; ita in deinceps, quæ connectantur rectis ſibi inuicem reſpondentibus AF. FB. BG. &c. & KO. OL. LM. &c. quæ efficient duo polygona in ellipſi & circulo; item in parabolis & Hyperbolis analogis, eo modo quo definitione 5. huius traditum eſt. Dico polygonum AFBGCHDI. ad polygonum KOLXM. eſſe vt altitudinem figuræ CA. ad altitudinem figuræ MK. Secet recta quæpiam AC. rectas FI. BD. GH. bifariam in punctis V. E. Y. ſitque ad angulos rectos parallelis extremis, erit AV. altitudo trianguli FAI. VE. altitudo trapezij FD. & EY. altitudo trapezij BH. & YC. altitudo trianguli in circulo ; in Parabola vero aut Hyperbola vltimi trapezij GCH. Ita ſit KM. ad angulos rectos parallelis extremis, & KM. diameter ſecet parallelas proportionales OQ. LN. XP. bifariam in punctis S. R. T. erunt KS. SR. RT. altitudines trianguli, & trapeziorum OKQ. QN. LP. & TM. altitudo trianguli XMP. in ellipſi; in Parabola vero aut Hyperbola trapezij XMP. Quoniam igitur triangula FAI. OKQ. æquales habeat baſes, ex hypotheſi, erunt inter ſe vt altitudines: quare vt AV. ad KS. ita triangulum FAI. ad triangulum OKQ. Rurſus quia trapeziorum Corol. 1. 6.

ziorum FD. ON. æqualia ſunt latera parallela FI. BD. la-
28. quarti. teribus OQ. LN. ſunt inter ſe vt altitudines VE. SR. Eo-





dem modo oſtendemus vt EY. ad RT. ita trapezium BH. ad trapezium LP. & vt YC. ad TM. ita triangulum, aut trapezium GCH. ad triangulum aut trapezium XMP.
defin. 1. huius. Cum igitur ſit triangulum FAI. ad triangulum OKQ. vt AV. ad KS. & vt AV. ad KS. ita VE. ad SR. & vt VE. ad SR. ita trapezium FD. ad trapezium ON. erit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita trapezium FD. ad trapezium ON. Item cum ſit trapezium FD. ad trapezium
3. Lemm. huius. ON. vt VE. ad SR. & vt VE. ad SR. ita EY. ad RT. & vt EY. ad RT. ita trapezium BH. ad trapezium LP. erit vt trapezium FD. ad trapezium ON. ita trapezium BH. ad trapezium LP. Atque eadem ratione oſtendemus eſſe vt tra-

trapezium BH. ad trapezium LP. ita triangulum aut trapezium GCH. ad triangulum aut trapezium XMP. Quare cum ſit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita trapezium FD. ad trapezium ON. & vt trapezium FD. ad trapezium ON. ita trapezium FH. ad trapezium LP. & vt trapezium FH. ad trapezium LP. ita triangulum aut trapezium GCH. ad triangulum aut trapezium XMP. erit vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita totum polygonum AFBGCHDI. ad totum polygonum KOLXMPNQ. ſed vt triangulum FAI. ad triangulum OKQ. ita AV. ad KS. vt modo probatum eſt, & vt AV. ad KS. ita AC. ad KM. vt igitur AC. altitudo ad altitudinem KM. ita polygonum AFBGCHDI. ad polygonum KOLXMPNQ. Quod erat demonſtrandum.

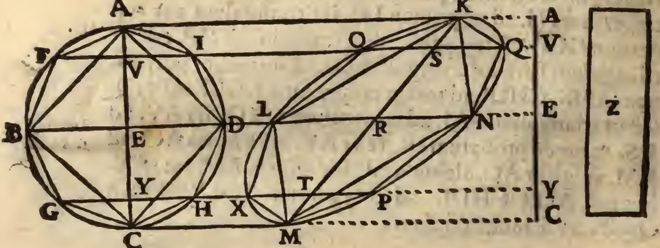
12. 5. Lemm. 1. huius.

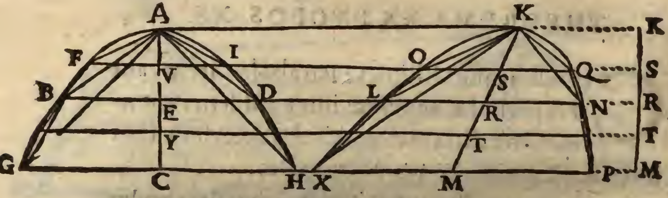
THEOREMA XX PROPOS. XX.

Circuli atque Ellipſes: Parabolæ item, aut Hyperbolæ analogæ inter eaſdem, aut æqualiter diſtantes parallelas deſcriptæ ſunt inter ſe vt parallelæ proportionales.

Inter eaſdem parallelas AK. CM. deſcripta ſint circulus ABCD. & ellipſis analoga KLMN. & Parabolæ aut Hyperbolæ AC. KM. quorum parallelæ quælibet proportionales FI. OQ. Dico eſſe vt FI. ad OQ. ita circulum ABCD. ad ellipſin KLMN. & Parabolam aut Hyperbolam AC. ad Parabolam aut Hyperbelam KM. Si enim non ita ſit; ſit vt ad OQ. ita circulus aut Parabola aut Hyperbola data ABCD. ad aliquam aliam magnitudinem quæ ſit Z. quæ vel minor erit, vel maior ellipſi vel Parabola, vel Hyperbola analoga KLMN. ſi enim eſſet æqualis, haberet circulus ABCD. ad ellipſin KLMN. eandem proportionem, ac propterea eſſet circulus ad ellipſin vt FI. ad OQ. quod non ſupponitur. Sit ergo primum magnitudo Z. minor quam 7. 5.

11 huius. ellipſis KLMN. atque idem dicendum in Parabolis aut Hyperbolis: Inſcribatur ellipſi & Parabolæ, ac Hyperbo-





læ analogæ KM. figura multorum angulorum, & numero parium quæ maior ſit magnitudine Z. minore quam ipſa Ellipſis aut Parabola aut Hyperbola data ſitque dicta figura KOLXMPNQ. Hinc circulo ABCD. inſcribatur Polygonum ſimiliter polygono ellipſeos quod ſit AFBG CXDI. (ac quod de ellipſi dicitur intelligatur de Para-
14 huius. bola & Hyperbola analoga) Quoniam eſt vt FI. ad OQ. ita polygonum AFBGCXDI. ad polygonum KOLXMP NQ. & vt FI. ad OQ. ita ponitur circulus ABCD. ad magnitudinem Z. erit vt polygonum AFBGCHLI. ad polygonum KOLXMPNQ. ita circulus ABCD. ad magnitudinem Z. & permutando, vt polygonum AFBGCHLI. ad

circulum

circulum ABCD. ita polygonum KOLXMPNQ. ad magnitudinem Z. ſed polygonum AFBGCHLI. eſt minus circulo ABCD. igitur & polygonum KOLXMPNQ. eſt minus magnitudine Z. oſtenſum autem eſt & maius: quod eſt abſurdum; non igitur minor eſt magnitudo Z. ellipſi KLMN. Quo vero modo probauimus non poſſe eſſe vt FI. ad OQ. ita circulum ABCD. ad magnitudinem minorem ellipſi KLMN. ita oſtendemus non poſſe eſſe vt OQ. ad FI. ita ellipſin KLMN: ad magnitudinem circulo ABCD. minorem, vt euidenter conſtat. 14. 5.

Sit deinde magnitudo Z. maior ellipſi KLMN. Cum ergo ponatur circulus ABCD. ad Z. eſſe vt BD. ad LN. erit & conuertendo Z. ad circulum ABCD. vt LN. ad BD. ponatur vt Z. ad circulum ABCD. ita ellipſis KLMN. ad magnitudinem aliquam 3. erit permutando vt Z. ad Ellipſin KLMN. ita circulus ABCD. ad magnitudinem 3. ſed Z. ponitur maior quam ellipſis KLMN. ergo maior eſt circulus ABCD. magnitudine 3. Quare erit vt LN. ad BD. ita ellipſis KLMN. ad magnitudinem 3. minorem circulo ABCD. Quod eſt abſurdum, & contra id quod in fine primæ partis huius probatum, eſt. Ergo circuli atque ellipſes analogæ &c. Quod erat demonſtrandum. 14. 5.

Idem ſequetur ſi inter æqualiter diſtantes diametros circulus atque ellipſis; Parabolæ item atque Hyperbolæ analogæ deſcribantur.

COROLLARIVM.

Hinc conſtat circulos atque ellipſes analogas inter eaſdem parallelas motu æquidiſtanter proportionali deſcriptas eſſe vt ſecundas diametros: nam ſecundæ diametri etiam ſunt parallelæ proportionales.

THEO-

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

CIrculus & ellipſis analoga; Parabolæ item aut Hyperbolæ analogæ inter diuerſas parallelas motu æquidiſtanter, & æqualiter proportionali deſcriptæ ſunt inter ſe vt altitudines.

Inter diuerſas parallelas deſcriptæ ſint figuræ analogæ, circulus quidem & ellipſis; Parabolæ item Hyperbolæ AC. KM. motu æquidiſtanter & æqualiter proportionali ita rectæ FV. VI. parallelis proportionalibus OS. SQ. ſint æquales, & BE. ED. ipſis LR. RN. atque ita deinceps. Dico eſſe vt altitudinem figuræ AC. ad altitudinem figuræ KM. ita figuram AC. ad figuram KM. Si enim non ita ſit; vt altitudo figuræ AC. ad altitudinem figuræ KM. ita fiat figura AC. ad aliquam aliam magnitudinem quæ ſit Z. quæ vel minor erit, vel maior figura KM. ſi enim eſſet æ-
7. 5. qualis haberet figura AC. ad figuram KM. eandem proportionem, atque ideo eſſet figura AC. ad analogam KM. vt altitudo ipſius AC. ad altitudinem ipſius KM. quod non conceditur. Sit ergo primum magnitudo Z. minor
1. huius. quam figura analoga KM. cui inſcribatur, ſiue ellipſis ſit ſiue Parabola ſiue Hyperbola, figura multorum angulorum, & numero parium quæ maior ſit magnitudine Z. quæ ponitur minor quam figura analoga KM. & figuræ AC. inſcribatur polygonum ſimiliter ei quod in figura KM. quod ſit AFBGCHDI. ſecundum defin. 5. huius, eodem prorſus modo quo in 15. huius, & ſecunda 12. elementorum ſequetur abductione ad abſurdum eſſe AC.
19. huius. KM. figuras inter ſe, vt altitudines. Nam quia eſt vt altitudo figuræ AC. ad altitudinem ipſius KM. ita polygonum AFGBCHDI. ad polygonum KOLXMPNQ. & vt dicta

alti-

altitudo ad altitudinem, ita ponitur figura AC. ad magnitudinem Z. erit vt polygonum AFGBCHDI. ad polygonum KOLXMPNQ. ita figura AC. ad magnitudinē Z. & permutando vt polygonum AFBGCHDI. ad figuram AC. ita polygonum KOLXMPNQ. ad magnitudinem Z. ſed polygonum AFBGCHLI. eſt minus figura AC. Igitur & polygonum KOLXMPNQ. eſt minus magnitudine Z. oſtenſum autem & maius. Quod eſt abſurdum. Hinc eodem prorſus modo quo in ſecunda parte præcedentis, & in 2. numero duodecimi, oſtendemus magnitudinem Z. non poſſe eſſe maiorem figura KM. Igitur illi æqualis erit. Vt igitur altitudo figuræ AC. ad altitudinem figuræ KM. ita figura AC. ad Z. æquale ipſi KM. nempe ad ipſam KM. Quod erat demonſtrandum.

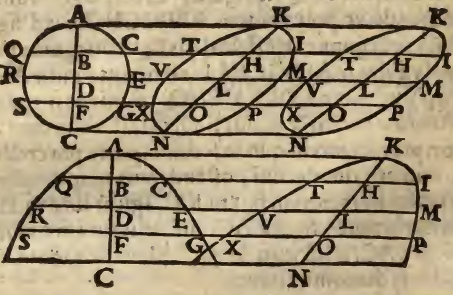
THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

OMnes Ellipſes Parabolæ, Hyperbolæ analogæ quæ motu ad datum circulum aut Parabolam aut Hyperbolam & æquidiſtanter, & æqualiter proportionali inter eaſdem parallelas deſcriptæ ſunt, tum figuræ datæ tum inter ſe ſunt æquales: item quarum parallelæ lineæ proportionales ad parallelas datæ figuræ eandem habent rationem, inter ſe ſunt æquales.

Inter duas parallelas AK. CM. deſcriptus ſit circulus, aut Parabola, aut Hyperbola ARCE. cuius diameter ad parallelas recta ſit AC. & motu aut æqualiter ac æquidiſtanter proportionali deſcribantur quotlibet ellipſes aut Parabolæ, aut Hyperbolæ analogæ KVNM. ita nimirum vt omnes parallelæ proportionales circuli parallelis ellipſium ſint æquales, vt ipſæ QB. BC. in circulo ipſis TH. HI. in ellipſi: item RD. DE. ipſis VL. LM. atque ita deinceps:

aut

aut certe ſecundæ diametri ellipſium VM. VM. habeant eandem rationem ad diametrum circuli RE. vel AC. atque



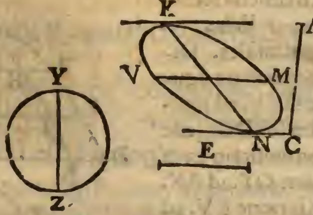
eodem modo in Parabolis & Hyperbolis. Dico in primo caſu ellipſes KN. tum inter ſe, tum circulo eſſe æquales; in ſecundo eaſdem ellipſes eſſe inter ſe æquales: atque eadem ratione Parabolas aut Hyperbolas KN. analogas tum inter ſe tum datæ AC. eſſe æquales; in ſecundo eaſdem inter ſe eſſe æquales. Nam cum in primo caſu parallelæ proportionales TI. aut VM. in ellipſi, parallelis QC. aut RE.
20. huius. circuli ſint æquales, ſint autem circuli & ellipſes analogæ
1. pronunc. inter eaſdem parallelas vt parallelæ proportionales; manifeſtum eſt circulum AC. cuiuis ellipſium, ipſaſque inter ſe eſſe æquales. Quod ſi earumdem ellipſium parallelæ proportionales VM. ad parallelam RC. eandem habeant
9. 5. rationem, erunt æquales inter ſe; cum autem ſint ipſæ ad circulum vt parallelæ proportionales ad parallelas circuli: manifeſtum eſt ipſas ad circulum eandem habere ratio-
9. 5. nem, ideoque eſſe inter ſe æquales. Atque eadem ſequuntur in Parabolis & Hyperbolis analogis. Quod erat demonſtrandum.

THEO-

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

ELlipſis dato circulo analoga inter diuerſas parallelas deſcripta eam ad circulum rationem habet, quam ſecunda diameter ellipſis ad rectam quæ altitudini ellipſis & altitudini ſeu diametro circuli ſit tertio loco proportionalis.

Sit ellipſis KN. dato circulo YZ. analoga ſed inter diuerſas parallelas conſtituta. ſitque ſecunda diameter ellipſis VM. eiuſque altitudo perpendicularis AC. & altitudo ſeu diameter circuli dati YZ. fiatque vt AC. ad YZ. ita YZ. ad aliam rectam quampiam E. Dico eſſe vt VM. ad E. ita ellipſin KN. ad circulum YZ. ſit eodem motu æquidiſtanter proportionali quo ellipſis KN. deſcripta eſt, deſcriptus etiam circulus AC. erit vt diameter VM. ad diametrum AC. ita ellipſis KN. ad circulum AC. & vt quadratum diametri AC. ad quadratum diametri YZ. ita circulus AC. ad circulum YZ. vt autem quadratum diametri AC. ad quadratum diametri YZ. ita diameter AC. ad tertiam proportionalem E. Quare cum ſit vt diameter VM. ad diametrum AC. ita ellipſis KN. ad circulum AC. & vt AC. ad E. ita circulus AC. ad circulum YZ. erit ex æquali vt diameter VM. ad rectam E. ita ellipſis KN. ad circulum YZ. Quod erat demonſtrandum.



2.3.4. huius.

Corol. 20. huius.

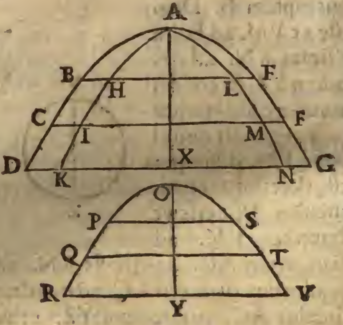
2. 12.

Corol. 20. 6.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

CIrculi atque ellipſes inæquales, item Parabolæ, atque Hyperbolæ analogæ inter diuerſas parallelas deſcriptæ habent rationem compoſitam ex ratione altitudinum, & ratione parallelarum proportionalium.

Sint circulus atque ellipſis ADG. ORV. vel duæ Parabolæ ADC. ORV. vel duæ Hyperbolæ ADG. ORV. inæquales, ADG. maior, minor ORV. ſed analogæ, & ductæ ſint in figura ADG. parallelæ BE. CF. DG. proportionales parallelis PS. QT. RV. & ſint altitudines AX. OY. quæ & diametri ſecantes parallelas proportionales. Dico rationem figuræ OKV. ad figuram ADG. eſſe compoſitam ex ratione OY. ad AX. & ratione RV. ad DG. Sumantur circa AX. rectæ HL. IM. KN. æquales ipſi PS. QT. RV. Erit



AKN. figura analoga ipſi OKV. vt ex demonſtratis ſuperioribus propoſitionibus conſtat; quare vt AX altitudo ad altitudinem OY. ita figura ADG. ad figuram ORV. vt conſtat ex 21. huius, & vt KN. id eſt RV. ad DG. ita figura AKN. ad figuram ADG. vt probatum eſt 20. huius. Ergo cum ſit vt figura ORV. ad figuram AKN. ita OY. ad

AX. & vt figura AKN. ad figuram ADG. ita DG. ad KN. erit ratio ORV. ad ADG. compoſita ex rationibus OY. ad AX. & KN. id eſt RV. ad DG. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

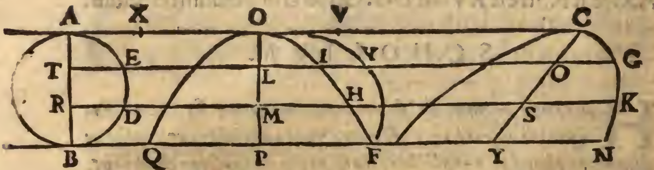
Hactenus egimus de figuris quæ motu ita fiunt, vt earum diametri in eaſdem rationes diuidantur, ipſæque diametri chordas parallelas etiam proportionaliter diuidant. Nunc tranſeundum ad illas quas definitione ſexta huius deſcripſimus, in quibus chordæ vnius figuræ circa alterum extremum diametri circumuolutæ & in peripheriam figuræ terminatæ; chordis alterius figuræ motu parallelo delatis ac per prioris peripheriæ puncta tranſeuntibus ſunt proportionales.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

SI motu ad chordas circuli coniunctas æquidiſtanter proportionali Conicoides primum deſcribatur illud eſt Parabola.

Sit Conicoides primum QOF. inter duas parallelas AO. BF. deſcriptum cuius vertex O. diameter OP. ordinatim applicatæ LI. MH. ipſi BF. parallelæ. Dico Conicoides QOF. eſſe Parabolam. Sit primum OP. diameter ad extremas parallelas perpendicularis, & intra duas parallelas AO. BF. deſcriptus ſit circa diametrum AB. ad extremas AO. BF. orthogoniam circulus ADB. & productæ IL. HM. ſecent peripheriam circuli in E. D. & diametrum in T. R. & connectantur AE. AD. item BE. BD. erunt ex definitione 6. huius, rectæ LI. MH. rectis AE. AD. proportionales; ſint autem primum æquales: erit vt quadratum MH. ad quadratum LI. ita quadratum AD. ad quadratum AE. ſed quadrato AD. æquale eſt rectangulum (definit. 6. huius.)

BAR. & quadrato AE. rectangulum BAT. (nam in trian-
31. 3. gulis rectangulis BDA. BEA. ad D. & E. in quibus ad ba-



ſes demiſſæ ſunt perpendiculares DR. ET. ex hypotheſi,
8. 6. eſt vt BA. ad AD. ita AD. ad AR. & vt BA. ad AE. ita
17. 6. AE. ad AT. ideoque quadrata AD. AE. rectangulis BAR.
11. 5. BAT. æqualia ſunt) igitur vt quadratum MH. ad quadratum LI. ita rectangulum BAR. ad rectangulum BAT.
Lemm. 1. huius. ſed rectangula BAR. BAT. rectangulis POM. POL. ſimilia ſunt (Nam vt BA. ad AR. ita PO. ad OM. & vt BA.
Definit. 1. 6. ad AT. ita PO. ad OL. ſimilia igitur ſunt rectangula BAR. POM. & PAT. POL.) eſtque vt BA. prima ad PO. ſecundam, ita BA. tertia ad PO. quartam, erit vt rectangu-
22. 6. lum BAR. ad rectangulum POM. ita rectangulum BAT. ad rectangulum POL. & permutando, vt rectangulum BAR. ad rectangulum BAT. ita rectangulum POM. ad rectangulum POL. ſed rectangulum BAR. ad rectangulum BAT. paulo ante oſtenſum eſt eſſe vt quadratum MH. ad
11. 5. quadratum LI. igitur erit vt rectangulum POM. ad rectangulum POL. ita quadratum MH. ad quadratum LI.
1. 6. ſed vt rectangulum POM. ad rectangulum POL. ita (poſita communi altitudine PO.) MO. ad LO. igitur quadratum MH. ad quadratum LI. eſt vt MO. ad LO. Iam vero fiat vt PO. diameter Conicoidis primi ad BA. diametrum circuli, ita diameter circuli ad tertiam OV. quæ ipſi PO. in vertice O. aptetur ad angulos rectos, & ſit AX. æqualis
17. 6. ipſi AB quoniam eſt vt PO. ad AB. ita AB. ad OV. erit rectangulum POV. quadrato BA. æquale. Rurſus quoniam

pro-

proportionaliter diuiſæ ſunt BA. PO. in punctis T. L. erunt rectangula XAT. id eſt BAT. & VOL. æqualia, rectangulo autem BAT. æquale eſt quadratum AE. vt ſupra oſtenſum eſt, & quadrato AE. quadratum LI. cum æquales ſint, ex deſcriprione, AE. LI. Igitur rectangulum VOL. quadrato LI. æquale eſt. Lemm. 2. huius. definit. 6. huius.

Iuam vero conſtat ex 52. 1. Conic. poſſe inueniri Parabolam cuius diameter ſit data OP. vertex punctum O. terminus ipſius OP. Ducta vero quælibet vt QP. a ſectione ad diametrum in angulo recto QPO. poſſit rectangulum POV. ſub diametro PO. & recta illi perpendiculari OV. quæ erit latus rectum ex 11. 1. Conicorum. Inuenta iam ſit, & imponatur Parabola Conicoidi primo; congruent PO. Conicoidi & PO. Parabolæ cum æquales poſitæ ſint: item QP. vtriuſque figuræ, cum tam rectæ QP. quam anguli QPO. ponantur æquales: denique eandem ob cauſam conuenient OV. in vtraque figura. Igitur aut congruet toti Conicoidi Parabola; aut minime. Ponatur primum non congruere, & vbi deficiunt applicetur ordinatim LIY. quæ ſecet Conicoidis lineam curuam in puncto I. Parabolæ vero in Y. Quoniam in vtraque figura OV. eſt recta iuxta quam poſſunt ordinatim applicatæ, &, vt paulo ante oſtenſum eſt, rectangulum LOV. æquale eſt quadrato LI. & rectangulum LOV. æquale eſt quadrato LY. æqualia ſunt quadrata LI. LY. pars & totum: Quod eſt abſurdum: Congruent igitur Conicoides primum & Parabola: ergo æqualia ſunt, & in vnam figuram coincidunt. 52. 1. Conic. 11. 1. Conic. 11. 1. Conic. 9. 5.

Sed Conicoides primum, ſit non QOF. ſed CNY. & angulus CYN. quicumq; & rectæ GO. KS. NY. cum rectis LI. MH. PF. continuatæ ipſis AE. AD. AB. id eſt LI. MH. PF. proportionales. Dico etiam CNY. eſſe Parabolam. Cum enim parallelæ ſint OC. QY. & proportionales OL. LM. MP. ipſis CO. OS. SY. item proportionales LI. MH. PF. ipſi GO. KS. NY. erit figura CNY. ad Parabolam QOF. analoga, ac motu æquidiſtanter ad Parabolam pro- Lem. 1. huius. defin. 5. huius. defin. 1. huius.

por-

16.huius. portionali procreata, igitur & ipſa eſt Parabola. Quare Conicoides primum eſt Parabola. Quod demonſtrare oportuit.

Vocetur autem Parabola.

COROLLARIVM. I.

Ex dictis manifeſtum eſt ſi diameter Parabolæ PO. ſit perpendicularis ad rectas AO. BF. & rectæ LI. MH. PF. chordis AE. AD. AB. æquales, rectangulum POL. eſſe æquale quadrato LI. & rectangulum POM. quadrato MH. Cum enim
34. 1. *æquales ſint PO. BA. & OL. AT. erunt rectangula POL. BAT. æqualia, at rectangulum BAT. quadrato AE. & quadratum AE. quadrato LI. æquale eſt: æqualia igitur ſunt rectangulum POL. & quadratum LI. atque eandem ob cauſam æqualia ſunt rectangulum POM. & quadratum MH,*

COROLLARIVM. II.

Aperte etiam deducitur, immo cum propoſitione conuenit quod ſequitur: ſi in ſinus arcuum circuli productos, ex punctis in quibus diametrum ſecant chordæ eorumdem arcuum, vel chordis proportionales transferantur, per earum extrema tranſiens linea curua Parabola eſt. Vt in figura prima definitionis 6. huius; ſi ſemicirculus ACB. ſecetur in quotlibet arcus AD. AE. AC. AB. quos ſubtendunt chordæ AE. AD. AC. AB. & ſinus EL. DM. CN. & tangens FB. in quibus productis accipiantur LI. MH. NG. BF. ipſis AE. AD. AC. AB. proportionales, curua linea AIHGF. per extrema illarum linearum tranſiens eſt Parabola: hoc enim ipſum ſub alio titulo in propoſitione demonſtratum eſt.

COROLLARIVM. III.

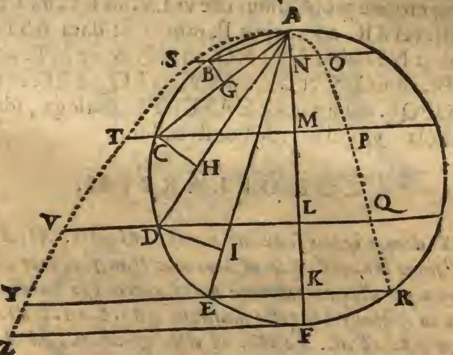
Conſtat etiam ex vltima parte propoſitionis, omnes Parabolas quæ motu ad chordas circuli coniunctas produ-

ducuntur eſſe analogas; atque ideo quæ ſupra de Parabolis analogis dicta ſunt illis conuenire.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

SI a circuli vertice ductæ chordæ æqualium arcuum peripheriam ſecent in punctis a quibus in ſequentes ac maiores chordas perpendiculares ducantur, quæ in ſinus eorundem arcuum a punctis in quibus diametrum ſecant hinc inde transferantur: Curua linea per earum extrema tranſiens eſt Parabola.

Sit circulus ACF. cuius diameter AF. vertex A. diuidatur ſemicirculus ACF. in quotcumque partes æquales



AB. BC. CD. DE. EF. quæ connectantur chordis AB. AC. AD. AE. AF. & ducantur ſinus BN. CM. DL. EK. (quos etiam vltra puncta NMLK. produximus) ab exrremis

pun-

punctis B. C. D. E. chordarum, in quibus peripheriam ſecant, ducantur in ſequentes chordas perpendiculares BG. CH. DI. EK. quæ transferantur in ſinus a punctis N. M. L. K. ita vt NO. MP. LQ. KE. ipſis BG. CH. DI. EK. ſint æquales. Dico lineam curuam AOPQE. eſſe Parabolam. Sumantur chordis AB. AC. AD. AE. AF. æquales in ſinubus productis NS. MT. LV. KY. manifeſtum eſt quod per puncta A. S. T. V. Y. Z. tranſibit Parabola. Hinc cum æquales poſiti ſint arcus BC. CD. DE. EF. æquales, erunt anguli BAC. CAD. DAE. EAF. æquales ideoque in triangulis rectangulis GBA. HCA. IDA. KEA. reliqui anguli ad B. C. D. E. æquales ac omnia illa triangula ſimilia: vt igitur AB. ad BG. ita AC. ad CH. & permutando vt AB. ad AC. id eſt NS. ad MT. ita BG. ad CH. id eſt NO. ad MP. Eodem modo cum æquiangula ſint triangula ACH. ADI. erit vt AC. ad CH. ita AD. ad DI. & permutando vt AC. ad AD. id eſt MT. ad LV. ita MP. ad QL. atque eadem ratione probabimus eſſe vt LV. ad KY. ita LQ. ad KE. vel KR. cum igitur Parabola ſit data ASTVYZ. ſitque vt NS. ad MT. ita NO. ad MP. & vt MT. ad LV. ita MP. ad LQ. & vt LV. ad KY. ita LQ ad KE. erit figura AOPQE. datæ parabole ASTVYZ. analoga, ideoque Parabola. Quod erat demonſtrandum.

Coroll. 2. 25. huius.

27. 3.

32. 1.

4. 6.

16. huius.

COROLLARIVM.

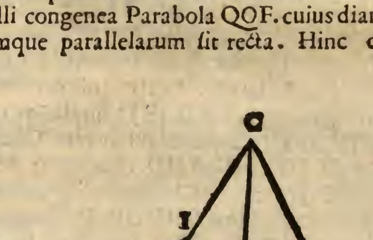
Ex demonſtratis ſequitur ſi rectæ AG. AH. AI. AK. in ſinus NB. MC. LD. KE. ordine transferantur, lineam curuam per illarum extrema tranſeuntem eſſe Parabolam. Nam in iiſdem triangulis ſimilibus ABG. CAH. DAI. EAK. eſt vt AB. ad AC. ita AG. ad AH. & vt AC. ad AD. ita AH. ad AI. & ſic deinceps; quare ſequitur id quod propoſitum eſt, eodem modo quo in propoſitione in rectis BG. CH. DI. EK. in ſinus translatis.

THEO-

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

PArabola recta ac circulo æquichordis, eſt ſectio coni æquilateri cuius baſis eſt circulus habens diametrum diametro circuli congenei duplam, diuidens illum circulum per centrum.

Sint inter parallelas AO. BF. circulus cuius diameter AB. & illi congenea Parabola QOF. cuius diameter PO. ad vtramque parallelarum ſit recta. Hinc centro H.



ſemidiametro HG. quæ ipſi AB. ſit æqualis, deſcribatur circulus DFEG. qui ſit baſis coni æquicruris cuius

vertex A. ſeceturque plano per axem quod ſectionem faciat triangulum æquicrure CDE. Ductaque per centrum diametro FHG. ad DE. perpendiculari, & diuiſa DC. bifariam I. ſecetur altero plano tranſeunte per rectam FG. & rectam IH. quæ cum ſit parallela ipſi CE.
15. definit. (nam diuiſa DE. bifariam in H. & DC. bifariam in I.
2. 6. ex hypotheſi, erit vt DH. ad HE. ita DI. ad IC. ideoque parallelæ IH. CE.) conſtat ſectionem FIG. quæ fit illo
11.1.Conic. plano, eſſe Parabolam. Dico Parabolam FIG. Parabolæ QOF. congruere, ideoque vnam & eandem eſſe figuram.
15. defin. Nam cum ſumpta ſit HG. æqualis AB. erit GF. quæ dupla eſt ipſius GH; etiam dupla ipſius AB. ſed ipſius AB. dupla eſt QF. ex deſcriptione: igitur æquales ſunt baſes FG. QF. duarum Parabolarum. Rurſus quia parallela eſt IH.
Cor. 4. 6. ipſi CE. erunt triangula CED. IHD. ſimilia: quare vt CE. ad ED. ita IH. ad HD. æquales autem ſunt CE. ED. igitur æquales IH. HD. ſed ipſi HD. eſt æqualis AB. ex hy-
34. 1. potheſi, & ipſi AB. recta OP. in parallelogrammo ABPO. æquales igitur ſunt diametri IH. OP. Parabolarum FIG. QOF. ſed & anguli FHI. QPO. recti ſunt, hic ex hypotheſi, ille quia cum conus ſit æquicruris erunt rectæ a vertice C. ad puncta D. F. E. G. æquales, in triangulis igitur CFH. CGH. habentibus duo latera FH. HC. duobus
8. 1. GH. HC. æqualia, & baſim FC. baſi GC. æqualem, erunt
10. definit. & anguli FHC. GHC. æquales, ideoque recti; atque eo-
3. defin. 11. & 4. prop. 11. dem modo oſtendentur recti DHC. EHC. recta igitur eſt CH. ad planum DFEG. Quare etiam rectum eſt planum
18. 11. CDE. plano GDFE. Igitur & planum GDFE. ipſi plano CDF. rectum eſt; cum igitur recta FH. faciat angulos re-
4. 11. ctos cum DE. CA. in puncto H. inſiſtet plano DCE. ad
3. defin. 11. angulos rectos: quare ſequitur angulum FHI. eſſe rectum. Denique ſi fiat vt quadratum DE. ad rectangulum DCE.
11.1. Conic. ita linea KI. ad IC. erit KI. latus rectum, æquale ipſi IC. (nam in triangulo æquicrure DCE. quadratum DE. rectangulo DCE. æquale eſt) id eſt ipſi ID. id eſt ipſi DH.

id

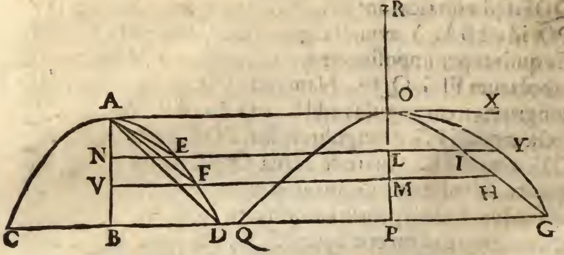
id eſt ipſi AB. ipſi autem AB. eſt etiam æquale latus rectum PV. Parabolæ QOF. (nam ſi fiat vt PO. ad BA. ita BA. ad aliam OV. erit tertia illa OV. latus rectum Parabolæ QOF. ſed æquales ſunt BA. PO. Igitur æquales ſunt OV. PO. id eſt BA.) æqualia igitur ſunt latera recta OV. KI. Ex quibus per impoſitionem facile colligitur identitas Parabolarum FIG. QOF. Nam recta PO. rectæ æquali HI. congruet, item angulus ad H. angulo ad P. & recta QF. rectæ æquali FG. & angulus rectus POV. recto HIK. & OV. æquali IK. Quare & curua QOF. curuæ FIG. congruet. Si enim non dicantur congruere fiet abductio ad abſurdum eodem prorſus modo quo 16. huius. Congruent igitur: ergo eadem erit figura QOF. ipſi FIG. Quod erat demonſtrandum. 15. huius.

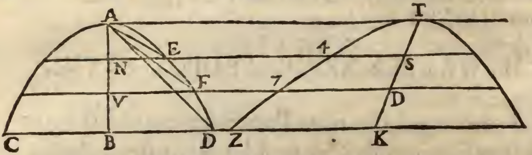
THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

SI motu ad chordas Parabolæ æquidiſtanter proportionali Conicoides ſecundum deſcribatur: illud erit Hyperbola.

Sint duæ parallelæ AO. BP. inter quas deſcripta ſit Parabola CAD. & motu ad ipſius chordas æquidiſtanter pro portionali, iuxta modum traditum definitione 6. huius deſcriptum ſit Conicoides ſecundum QOG. Dico illud eſſe Hyperbolam. Parabolæ diameter ſit AB. Conicoidis PO. vtraque primo perpendicularis ad AO. & BP. Producta autem PO. in R. accipiatur illi æqualis OR. & ipſi OR. ſit perpendicularis & æqualis OX: & applicatæ ordinatim LI. MH. producantur, dum Parabolæ diametrum ſecent in L. V. & ipſius lineam curuam in E. F. & ducantur chordæ AE. AF. AD. quæ primo ponantur æquales ipſis LI. MH. PG. Quoniam RO. ponitur æqualis ipſi OP. & OP. æqualis eſt ipſi AB. erit RO. æqualis ipſi AB. ſed & æquales ſunt OL. AN. rectangula igitur ROL. BAN. æqualia ſunt: ſed 34. 1.

Coroll. 1. 25. huius. rectangulo BAN. æquale eſt quadratum NE. Igitur rectangulum ROL. æquale eſt quadrato NE. At quadratum





47. .1 AE. eſt æquale quadratis AN. NE. & quadrato AE. eſt æquale LI. cum AE. LI. poſitæ ſint æquales, ergo quadratum LI. eſt æquale rectangulo ROL. & quadrato AN. id eſt OL. ſed rectangulo ROL. & quadrato OL. æquale eſt rectangulum RLO. igitur quadratum LI. eſt æquale rectangulo RLO. Eodemque modo oſtendemus quadratum MH. eſſe æquale rectangulo RMO. vt igitur rectangulum RLO. ad rectangulum RMO. ita quadratum LI. ad quadratum MH. Cumque æqualia ſint rectangulum RLO. & quadratum LI. & æquales etiam poſitæ RO. OX. patet eſſe vt rectangulum RLO. ad quadratum LI. ita RO. ad OX. Quæ proprietates etiam in Hyperbola demonſtratæ ſunt lib. 1. Conic. prop. 21. Vocetur autem RO. tranſuerſum figuræ latus & OX. rectum. Hinc eodem prorſus modo quo vltima parte 17. huius, demonſtrabimus Conicoides ſecundum eſſe Hyperbolam. Conſtat enim ex

53.

53. 1. Conic. poſſe inueniri Hyperbolam cuius latus rectum OX. tranſuerſum OR. & diameter OP. Ducta vero quælibet PG. a ſectione ad diametrum in angulo GPO. ſit vt RO. ad OX. ita rectangulum RPO. ad quadratum PG. congruent rectæ OP. Hyperbolæ inuentæ & QP. Conicoidis ſecundi, cum ſint æquales, item rectæ PG. Hyperbolæ & PG. Conicoidis, eo quod ſint æquales, & anguli ad P. æquales, & ob eandem rationem congruent OX. Hyperbolæ & Conicoidis, & RO. vtriuſque figuræ. Ergo vel figuræ totæ congruent, vel minime. Ponantur primum non congruere, ac vbi deficiunt applicetur ordinatim LIY. quæ ſecet Conicoides in I. Hyperbolam in Y. Quoniam in vtraque figura OX. eſt recta iuxta quam poſſunt ordinatim applicatæ, & RO. latus tranſuerſum; erit ex paulo ante demonſtratis, vt RO. ad OX. ita rectangulum RLO. ad quadratum LI. & vt RO. ad OX. ita rectangulum RLO. 21.1. Conicorum.
ad quadratum LY. æqualia igitur ſunt quadrata LI. LY. 9. 5.
pars & totum: quod eſt abſurdum. Congruent igitur Hyperbola ac Conicoides ſecundum: ergo in vnam figuram conincident, quare Conicoides ſecundum rectum & circulo æquichorde, eſt Hyperbola.

Sed Conicoides ſecundum ſit non QOG. ſed TZK. & angulus TKZ. quicumque, ac rectæ S4. D7. KZ. cum rectis LI. MH. PG. continuatæ, ipſis AE. AF. AD. id eſt LI. MH. PG. proportionales. Dico etiam TZK. eſſe Hyperbolam. Cum enim parallelæ ſint OT. PK. & proportionales OL. LM. MP. ipſis TS. SD. DK. item proportionales LI. MH. PG. ipſis S4. DT. KZ. erit figura TZK. ad Hyperbolam QOG. analoga, ac motu æquidiſtanter ad Hyperbolam proportionali procreata: igitur & ipſa Hyperbola. Quare Conicoides ſecundum eſt Hyperbola. Quod demonſtrare oportuit: *Vocetur Hyperbola conchordium prima*. Lemm. 1. huius. defin. 5. huius. defin. 1. huius. 17. huius.

CO-

COROLLARIVM I.

Conſtat ex vltima parte huius propoſitionis, omnes Hyperbolas quæ motu ad chordas parabolæ coniunctas æquidiſtanter proportionali producantur eſſe analogas; ideoque omnes affectiones Hyperbolarum analogarum illis conuenire.

COROLLARIVM II.

Manifeſtum item eſt ſi diameter Hyperbolæ PO. ſit perpendicularis ad extremas parallelas, & rectæ LI. MH. PG. ipſis AE. AF. AD. æquales, rectangula RLO. RMO. RPO. quadratis LI. MH. PG. ſingula ſingulis eſſe æqualia. Hoc enim in propoſitione probatum eſt.

COROLLARIVM III.

Denique, quod etiam de Parabola in 25. huius annotatum eſt, ſi in ordinatim applicatas Parabolæ productas ex punctis in quibus diametrum ſecant chordæ Parabolæ, vel chordis proportionales transferantur, per earum extrema tranſeuntem curuam eſſe Hyperbolam.

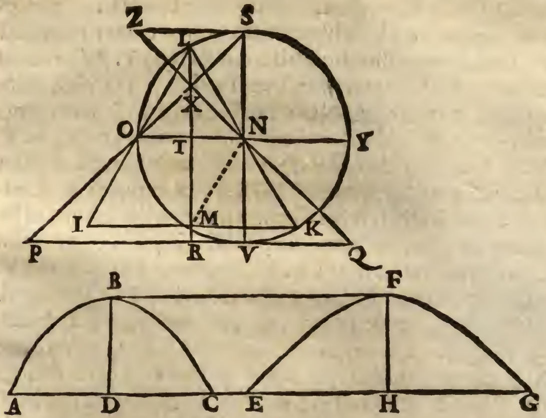
THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

Hyperbole prima, rectangula, ac Parabobolæ æquichordis eſt ſectio coni æquicruris rectanguli, cuius latus eſt æquale compoſitæ ex ſinu recto & ſecante anguli ſemirecti in circulo, in quo diameter eſt latus coni æquilateri cuius ſectione fit Parabola, ac ſemidiameter diametro ipſius Hyperbolæ æqualis, ita vt

dicta

dicta ſectio tranſeat per lineam æquidiſtantem rectæ ductæ a vertice ad centrum baſis, & abſcindentem ex latere coni ad verticem tertiam ipſius lateris partem.

Sit inter duas parallelas BF. AG. parabola congenea ABC. cuius diameter ad parallelas recta BD. Item congenearum prima Hyperbola EFG. cuius diameter FH. ad parallelas itidem recta, & in qualibet linea recta ſumatur IK. dupla ipſius BD. aut FH. ſuper qua erigatur triangu-



lum æquilaterum, circa quod vertice L. baſi IK. axe LM. perpendiculari ad baſim intelligatur deſcriptus conus æquilaterus, in quo ſectio tranſiens per verticem & diametrum baſis ſit idem triangulum æquilaterum LIK. cuius latus LK. diuidatur bifariam in N. & connectatur NM. (punctum autem M. diuidit baſim IK. bifariam) manife- Schol. in 26. 1.

ſtum

16.huius. ſtum eſt ſectionem tranſeuntem per NM. efficere in ſuperficie coni parabola ABC. Ducatur ipſi IK. parallela NO. ſecans axem ſeu perpendicularem LM. in T. & latus LI. in O. ac centro N. deſcribatur circulus OMKL. qui quidem tranſibit per M. K. L. Cum enim diuiſa ſit bifariam LK. in N. erunt LN. NK. æquales, & cum NO. parallela ſit ipſi
2.& 4. 6. IK. erit vt LK. ad KI. ita LN. ad LO. æquales autem ſunt LK. KI. æquales igitur LN. NO. ſed & NK. NM. æquales ſunt, medietates nempe æqualium laterum LK. KI. Hinc ducatur per centrum SNV. ipſi ON. perpendicularis, &
16. 6. per V. ad SV. perpendicularis PVQ. tangens circulum in V. infinita, cui occurrat SO. in P. ſecans LR. in X. & recta XNQ. in Q. Quoniam parallelæ ſunt ON. IK. eſtque re-
28. 1. ctus angulus ad M. ex hypotheſi etiam rectus erit angulus
Schol. in 26. 1. ad T. Ideoque diuiditur bifariam ON. in T. Adhæc cum
5.& 32. 1. angulus ONS. ſit rectus ex hypotheſi, & latera NO. NS. æqualia erunt anguli NOS. NSO. ſemirecti. Item cum triangula OTX. NTX. habeant circa angulos rectos ad T. latera OT. TX. lateribus NT. TX. æqualia, erunt baſes OX. NX. æquales & anguli TOX. TNX. æquales ac ſemirecti, ideoq; OXT. NXT. ſemirecti, angulus igitur OXN. rectus eſt. Sed & cum eidem ON. perpendiculares ſint
29. 1. LT. SN. paralellæ ſunt LR. SV. quare cum angulus ad V. rectus ſit, rectus eſt etiam angulus XRP. XRQ. ſed anguli ad X. oſtenſi ſunt ſemirecti, igitur ſunt & ſemirecti anguli
6. 1. ad PQ. Iſoſceles ergo eſt triangulum XPQ. cuius latus XQ. componitur ex recta XN. quæ eſt ſinus anguli ſemirecti XON. & ex recta NQ. quæ eſt ſecans anguli ſemirecti
15. 1. VNQ. (nam cum ſemirectus ſit XNS. etiam angulus ad verticem VNQ. eſt ſemirectus, cuius tangens VQ. ſecans NQ. ac ipſa XN. eſt tertia pars totius XQ. producta enim NX. dum tangenti ſemirecti SZ. occurrat in Z. erit NZ. ſecans ſemirecti, ac tam angulus SNZ. quam SZN. in trian-
5. 1. gulo NSZ. ſemirecti, ideoque æquales NS. SZ. ſed & recti
8 6. ſunt anguli NSZ. NXS. vt igitur NS. æqualis ad æqualem

SZ.

SZ. ita NX. æqualis ad æqualem XZ. quare NX. eſt medietas ſecantis ſemirecti NZ. id eſt NQ. ac proinde tertia pars totius XQ.) Iam vero circa verticem X. axem XR. circulumque cuius diameter PQ. vertatur triangulum XPQ. efformabitur Conus PXQ. æquicruris rectangulus, cuius latus XQ. compoſitum ex ſinu recto XN. & ſecante NQ. anguli ſemirecti in circulo SOV. ac diameter circuli eſt LK. latus coni æquilateri LIK. cuius ſectione NM. fit Parabola congenea. Sit autem idem triangulum XPQ. triangulum per axem, ac per diametrum baſis, & ſecetur conus ſecundum rectam NV. quæ producta productæ PX. occurrat in S. Manifeſtum eſt ſectionem tranſeuntem per V. eſſe Hyperbolam, nam ſectionis diameter VN. producta cum latere trianguli PX. conuenit in S. extra verticem, quæ ſemidiametro circuli SOV. eſt æqualis, & abſcindit ex latere XQ. verſus verticem rectam XN. quæ eſt tertia pars lateris XQ. Dico Hyperbolam cuius diameter NV. eſſe eandem Hyperbolæ FG. Fiat enim vt quadratum LR. ad rectangulum QRP. ita SN. ad aliam lineam NY. erit NY. latus rectum SN. tranſuerſum, ſed quadratum LR. rectangulo QRP. eſt æquale (oſtenſæ enim ſunt æquales QR. RL. & RL. RP.) igitur latus tranſuerſum SN. eſt æquale recto NY. & vtrumque diametro NV. ſed diameter NV. eſt æqualis diametro Parabolæ NM. id eſt ipſi BD. ex hypotheſi, & BD. diametro Hyperbolæ FH. Igitur Hyperbolæ EFG. & NV. habent æqualem diametrum, ſed in Hyperbola EFG. latus rectum, item tranſuerſum ſunt æqualia diametro FH. ergo latus tranſuerſum, & rectum Hyperbolæ EFG. ſunt æqualia lateri recto & tranſuerſo Hyperbolæ quæ tranſit per NV. ſed & rectangula ponitur vtraque Hyperbola; Cum ergo Hyperbolæ EFG. & quæ per NV. habeant æqualem diametrum, æquale latus rectum, æquale tranſuerſum, æqualeſque angulos efficiant ordinatim applicatæ ad diametrum nimirum rectos; Conſtat euidenter ex 53. 1. Co-

1. definit. 1. Conic.

3. 1. Conic.

12. 1. Conic.

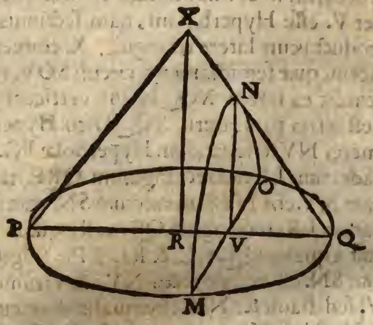
15. definit.

19. huius.

nicorum,& ex impoſitione;illas Hyperbolas ſibi congruere ideoque vnam,& eandem eſſe Hyperbolam. Quod fuerat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

HInc aperte colligitur ſi conus Iſoſceles rectangulus quilibet plano per tertiam lateris partem verſus verticem, axi parallelo ſecetur, ſectionem eſſe Hyperbolam, congenearum primæ ſimilem. Vt ſi conus Iſoſceles PXQ.



rectangulus ad X. ſumpta XN. tertia lateris parte ſecetur plano per NV. parallelo axi XR. ſectio MNO. erit Hyperbola ſimilis Hyperbolæ EFG. Nam cum omnia in vtraque ſimilia demonſtrentur, ex dictis erunt & ipſæ inter ſe ſimiles.

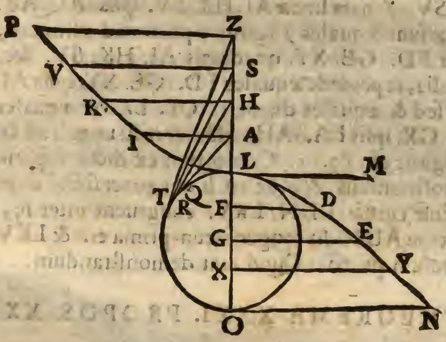
THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

SI recta linea extra circulum ita moueatur, vt altero extremo diametrum productam

ſecet,

ſecet, altero tangat: & per puncta vbi ea diametrum ſecat, recta ad diametrum perpendicularis continuo moueatur tangenti æqualis: linea extremitate dictæ perpendicularis deſcripta erit Iyperbola conchordium prima.

Sit circulus ACO. cuius diameter LO. perpendicularis ad parallelas tangentes LM. ON. quæ producatur extra peripheriam, & moueatur tangens quælibet a puncto L. verſus A. H. S. ita vt diametrum productam ſecet in A.



circulum tangat in Q. hinc diametrum ſecet in H. S. circulum tangat in R. T. &c. & per puncta A. H. S. moueatur continuo perpendicularis ad diametrum tangentibus æqualis, nempe AI. ſit æqualis AQ. & HK. ipſi HR. & SV. ipſi ST. & ZB. ipſi ZP. Dico lineam curuam LIKV. eſſe hyperbolam congenearum primam. Sit deſcripta circa LO. Hyperbola prima cuius diameter LO. eadem quæ circuli in qua ſumantur rectæ LF. LG. LX. LO. ipſi LA. LH. LS. LZ. æquales, & applicentur ordinatim FD. GE. XY. erit rectangulum ZFL. æquale quadrato FD. &

ZGL. æquale quadrato SE. & ZXL. æquale quadrato XY. atque ita deinceps. Rectangulo autem ZFL. æquale, eſt rectangulum OAL. (æquales enim ponuntur OL. ZL. item LF. LA. quare æquales OA. ZF.) & rectangulo ZGL. rectangulum OHL. & rectangulo ZXL. rectan-
39.huius gulum OSL. &c. ſed & rectangulo ZFL. æquale eſt quadratum FD. & rectangulo ZGL. quadratum GE. & rectangulo ZXS. quadratum XY. &c. Item rectangulo
36. 3. OAL. eſt æquale quadratum AQ. rectangulo OHL. quadratum HR. & rectangulo OSL. quadratum AT. ipſis autem quadratis AQ. AR. AT. æqualia ſunt quadrata AI. HK. SV. (nam lineæ AI. HK. SV. ipſis AQ. AR. AT.
1.pronunc. poſitæ ſunt æquales) Igitur a primo ad vltimum, quadrata FD. GE. XY. quadratis AI. HK. SV. &c. ſunt æqualia, ac proinde æquales FD. GE. XY. ipſis AI. HK. SV. ſed & æquales diametri OL. LZ. & æquales LF. FG. GX. ipſis LA. AH. HS. & recti anguli ad O. &
53.1.Conicorum. Z. Igitur ex 53. 1. Conicorum ex dictis ſuperioribus propoſitionibus, & 9. ac 16. huius, patet ſi ſibi imponantur duæ curuæ LDN. LKV. congruent inter ſe, ideoque cum ADN. ſit congenearum prima erit & LKV. conchordium prima. Quod erat demonſtrandum.

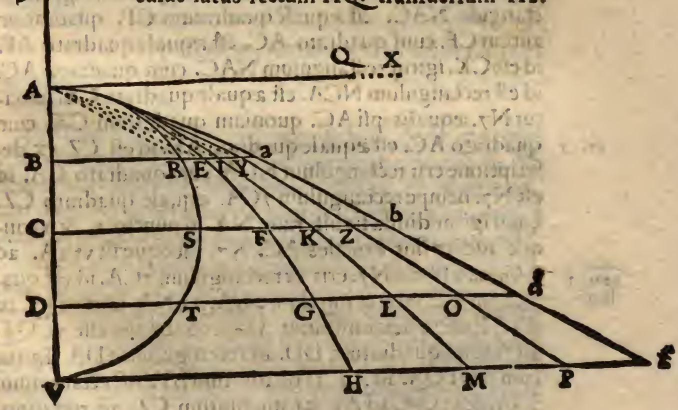
THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXI.

Conicoides tertium rectangulum, & primæ Hyperbolæ æquichorde eſt Hyperbola, cuius latus rectum eſt æquale lateri recto primæ Hyperbolæ, tranſuerſum recti dimidium.

Inter duas parallelas AX. VM. deſcriptus ſit circulus ASV. circa diametrum AV. perpendicularem ad parallelas, & circa eandem diametrum Conicoides primum AFH. Conicoides ſecundum AKM. Conicoides tertium AYZ. Diuiſaque AV. verbi gratia, in quotlibet & quas-

libet

libet partes in punctis B. C. D. ducantur ordinatim applicatæ BY. CZ. DO. &c. ſecantes Conicoidea ordine in punctis B. R. E. I. Y. item C. S. F. K. Z. & in punctis D. T. S. L. O. &c. & a puncto A. ducantur ad puncta ſectionum chordæ AR. AE. AI. AY. atque ita a vertice A. ad reliqua puncta intelligantur chordæ, quibus æquales erunt in ordinatim applicatis rectæ BE. BI. BY. nempe recta BE. chordæ AR. recta BI. chordæ AE. & recta BY. chordæ AI. atque ita in reliquis, recta CF. chordæ AS. recta CK. chordæ AF. & recta CZ. chordæ AK. &c. vt conſtat ex definitionibus huius, ac deſcriptione dictarum figurarum. Hinc in VA. producta, & in perpendiculari AX. ſumantur AN. AQ. ipſi VA. æquales, ipſiusque AN. dimidia pars A2. Dico Conicoides tertium eſſe Hyperbolã, cuius latus rectum AQ. tranſuerſum A2.



Quo-

Quoniam æquales ſunt VA. AB. rectis NA. AB. erit rectangulum VAB. æquale rectangulo NAB. ſed rectangu-
Coroll. 1. 13. huius. lo VAB. eſt æquale quadratum AR. id eſt BE. ex hypotheſi. Igitur rectangulo NAB. eſt æquale quadratum BE.
47. 1. quadratum autem BE. cum quadrato BA. eſt æquale quadrato AE. id eſt BI. igitur rectangulum NAB cum quadrato AB. id eſt rectangulum NBA. eſt æquale quadrato BI. ſumatur N6. æqualis ipſi AB. quoniam quadratum
47. BI. cum quadrato AB. eſt æquale quadrato AI. id eſt BY. ex deſcriptione, erit rectangulum NBA. cum quadrato AB. id eſt N6. nempe rectangulum 6BA. æquale quadrato BY. cum igitur diuiſa ſit bifariam NA. in puncto 2. & vtrinque additæ ſint æquales AB. N6. ideoque ſit vt 2A.
Lemm. 3. huius. ad AB. ita 2N. ad N6. erit vt rectangulum 6BA. id eſt quadratum BY. ad rectangulum 2BA. ita NA. id eſt QA. latus rectum ad A2. tranſuerſum. Eodem modo quoniam æquales ſunt VA. AC. rectis NA. AC. erit rectangulum
Coroll. 1. 13. huius. VAC. æquale rectangulo NAC. ſed rectangulo VAC. eſt æquale quadratum AS. id eſt CF. ex hypotheſi: igitur rectangulo NAC. eſt æquale quadratum CF. quadratum autem CF. cum quadrato AC. eſt æquale quadrato AF. id eſt CK. igitur rectangulum NAC. cum quadrato AC. id eſt rectangulum NCA. eſt æquale quadrato CK. ſumatur N7. æqualis ipſi AC. quoniam quadratum CK. cum
47. .1 quadrato AC. eſt æquale quadrato AK. id eſt CZ. ex deſcriptione erit rectangulum NCA. cum quadrato CA. id eſt N7. nempe rectangulum 7CA. æquale quadrato CZ. Cum igitur diuiſa ſit bifariam NA. in puncto 2. & vtrinque additæ ſint æquales AC. N7. ideoque ſit vt 2A. ad
Lem. 3. huius. AC. ita 2N. ad N7. erit vt rectangulum 7CA. id eſt quadratum CZ. ad rectangulum 2CA. ita NA. id eſt QA. ad A2. Eadem demonſtrandi via probabimus eſſe vt QA. ad A2. ita quadratum DO. ad rectangulum 2DA. Igitur cum ſit vt QA. ad A2. ita quadratum BY. ad rectangulum 2BA. & vt QA. ad A2. ita quadratum CZ. ad rectangulum

lum 2CA. erit vt quadratum BY. ad rectangulum 2BA. 11. 5.
ita quadratum CZ. ad rectangulum 2CA. & permutando, vt quadratum BY. ad quadratum CZ. ita rectangulum 2BA. ad rectangulum 2CA. eodemque modo oſtendemus eſſe vt quadratum DO. ad quadratum CZ. aut BY. ita rectangulum 2DA. ad rectangulum 2CA. aut 2BA. Quare cum hæ ſint proprietates Hyperbolæ ex 21. primi Conicorum, manifeſtum eſt ex dictis in propoſitionibus 17. & 28. huius Hyperbolam rectangulam cuius latus rectum AQ. tranſuerſum AZ. diameter AV. congruere cum Conicoide AZP. ideoque Conicoides tertium eſſe Hyperbolam, cuius latus rectum AQ. tranſuerſum AZ. Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXII.

Conicoides quartum rectangulum, & ſecundæ Hyperbolæ æquichorde eſt Hyperbola: cuius latus rectum eſt æquale lateri recto primæ Hyperbolæ, tranſuerſum eſt recti tertia pars.

Sint omnia quæ ſuperiori propoſitione, & ſit quartum Conicoides Aabf. ordine deſcriptum eo modo quo in definitione, ac ſuperiori propoſitione dictum eſt: Rectæ autem NA. accipiatur tertia pars A3. Dico Conicoides quartum AQa. eſſe Hyperbolam, cuius latus rectum AQ. tranſuerſum A3. Sumantur ipſi N6. id eſt AB. æqualis 67. 27. huius.
Nam vt conſtat ex ſuperiori propoſitione, quadrato BY. æquale eſt rectangulum 6BA. Quadratum autem AY. id eſt Ba. eſt æquale quadratis BY. AB. igitur quadratum Ba. eſt æquale rectangulo 6BA. & quadrato AB. quadrato autem 6BA. & quadrato AB. æquale eſt rectangulum 7BA. (cum æquales ſumpti ſint N6, 67. AB. erunt 7A. 6B.

6B. æquales & rectangulum 7AB. rectangulo 6BA. æquale, ideoque rectangulum 7BA. rectangulo 6BA. cum quadrato AB. æquale) Quare cum æquales ſint AB. N6. 67. erit AB. aggregati magnitudinum AB. N6. 67. tertia pars: ſed etiam A3. eſt tertia pars ipſius AN. vt igitur AB. N6. 67. ad AB. ita AN. ad A3: & diuidendo vt N7. ad AB. ita N3. ad A3. Igitur per Lemma 3. huius, erit vt rectangulum 7BA. id eſt quadratum Ba. illi æquale ad rectangulum 3BA. ita NA. id eſt AQ. latus rectum ad tranſuerſum A3. Eodem prorſus modo quo priori parte huius, & quo præcedenti, demonſtrabimus eſſe vt quadratum C6. ad rectangulum 3CA. ita QA. ad A3. Hinc eſſe vt Quadratum Ba. ad quadratum C6. ita rectangulum 3BA. ad rectangulum 3CA. Quare cum hæ ſint proprietates Hyperbolæ ex 21. 1. Conicorum; conſtat ex ijs quæ dicta ſunt in propoſitionibus huius Hyperbolam rectangulam cuius latus rectum AQ. tranſuerſum A3. diameter AV. congruere cum Conicoide Abf. ideoque Conicoides quartum rectangulum eſſe Hyperbolam, cuius latus rectum AQ. tranſuerſum A3. Quod erat &c.

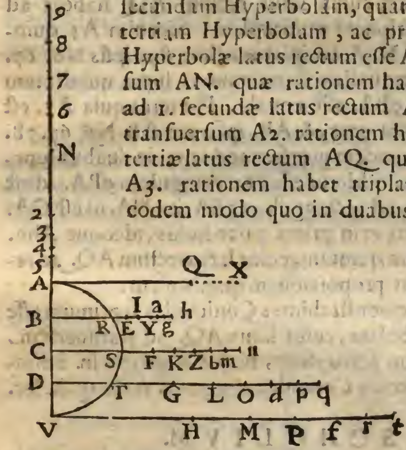
Lemm. 3. huius.

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIII.

OMnia Conicoidea rectangula & prioribus æquichordia primo excepto ſunt Hyperbolæ, quæ ſi ordine accipiantur eorum latera tranſuerſa rationem habent inter ſe a numeris ab vnitate ſerie naturali progredientibus, ſeu ab exponentibus denominatam.

Sit AV. diameter communis omnium conoideum congeneorum A. vertex AN. latus tranſuerſum, cui æqualis ſit perpendicularis AQ. Hinc ducta BH. infinita ordinatim

dinatim applicata; item recta per punctum E. intelligatur tranſite conicoides primum, per punctum I. ſecundum; per Y. tertium; per, a. quartum, per g. quintum; per h. ſextum, ac ſic deinceps: Dico hæc omnia conicoidea, primo excepto, eſſe Hyperbolas, ac latus rectum ad tranſuerſum in prima Hyperbola habere rationem quam 1. ad 1. in ſecunda duplam, in tertia triplam, in quarta quadruplam, & ſic in infinitum. Manifeſtum eſt Conicoides primum AE. eſſe Parabolam, ſecundum AI. eſſe 16. huius. 21. huius.
primam Hyperbolam congeneam; tertium AY. eſſe 27. huius.
ſecundam Hyperbolam, quartum Aa. eſſe 28. huius.
tertiam Hyperbolam, ac primæ quidem Hyperbolæ latus rectum eſſe AQ. tranſuerſum AN. quæ rationem habent quam 1. ad 1. ſecundæ latus rectum AQ. quod ad tranſuerſum A2. rationem habet duplam, tertiæ latus rectum AQ. quod ad rectum A3. rationem habet triplam: Iam vero eodem modo quo in duabus ſuperioribus probabimus, quartum conicoides Ag. eſſe quartam Hyperbolam, cuius latus rectum AQ adtranſuerſum habet rationem quadruplam. Reuocentur enim in memoriam duæ ſuperiores propoſitiones, & ſit A4. quarta pars ipſius AN. & præter partes acceptas N6. 67. æquales ipſi AB. accipiatur etiam 78. eidem AB. æqualis; eadem omnino ratione qua in duabus ſuperioribus probabimus quadratum gB. rectangulo 8BA. eſſe æquale. Rurſus quia A4. eſt ipſius AN. quarta pars & AB. ipſarum AB.



N6.67. 68. quarta pars,eodem penitus modo quo in duabus ſuperioribus demonſtrabimus eſſe vt rectangulum 8BA. id eſt quadratum gB. ad rectangulum 4BA. ita NA. id eſt QA. ad A4. Item vt quadratum mC. ad rectangulum 4CA. ita QA. ad A4. ideoque vt Quadratum Bg. ad quadratum Cm. ita rectangulum 4BA. ad rectangulum 4CA. ſicque propter eandem cauſam quam in duabus ſuperioribus attuſimus, conoides tranſiens per AGM. eſſe Hyperbolam quartam.

Neque aliter efficietur Conicoides ſextum eſſe quintam Hyperbolam cuius latus rectum AQ habeat ad tranſuerſum rationem quintuplam. Sit enim A5. quinta pars totius AN. & accipiatur adhuc 89. ipſis N6. 67. 78. & ipſi AB. æqualis; oſtendemus vt ſupra quadratum Bh. rectangulo 9BA. eſſe æquale. Præterea quia A5. eſt ipſius AN. quinta pars, & AB. ipſarum AB. N6. 67. 78. 89. quinta pars eodem prorſus modo quo in duabus ſuperioribus demonſtrabimus eſſe vt rectangulum 9BA. id eſt quadratum Bh. ad rectangulum 5BA. ita NA. id eſt QA. ad A5. ac reliqua vt in prima parte huius, ideoque Ahn. eſſe Hyperbolam quintam, cuius latus rectum AQ. ad rectum A5. habeat proportionem quintuplam.

Atque ita demonſtrabimus Conicoides ſeptimum eſſe ſextam Hyperbolam, cuius latus AQ. ad tranſuerſum habeat rationem ſextuplam; ſicque deinceps in infinitum. Quare omnia Conoidea congenea rectangula &c.

SCHOLIVM.

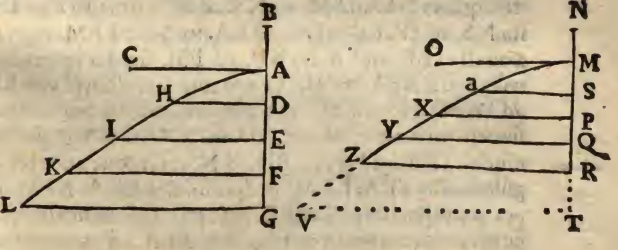
Ex ponentes vocamus hic, & ſequentibus propoſitionibus numeros quibus ordo Hyperbolarum quæ ſeſe mutua atque ordinata generatione procreant, deſignatur, vt ſi ordine diſponantur prima, ſecunda, tertia, quarta &c. Hyperbolæ earum exponentes dicentur numeri 1. 2. 3. 4. *atque ita deinceps.*

THEO-

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXIV.

SI Hyperbolæ conchordes rectangulæ prioribuſque æquichordes accipiantur, atque diameter prioris ad partem diametri poſterioris a vertice ſumptam rationem habeat quam exponens poſterioris ad exponentem prioris: erit prior Hyperbola poſteriori Hyperbolæ circa ſumptam diametri partem analoga; habebuntq; inuicem rationem ex rationibus altitudinum, & parallelarum proportionalium compoſitam.

Sint Hyperbolæ conchordes ALG. MVT. rectangulæ quarum vnaquæque præcedentis ſit æquichordis; atque ordine prior ſit ALG. poſterior quocumque interuallo MVT. ſintque earum exponentes quilibet numeri (ver-



bi gratia prioris 3. poſterioris 4. nempe prior Hyperbola ordine ſit tertia, poſterior quarta) & latera recta æqualia (ex 33. huius) AC. MO. tranſuerſa AB. MN. quæ pro- 33. huius. 33. huius.
portionem habent ab exponentibus denominatam; nempe vt exponens Hyperbolæ MVT. ad exponentem Hy-

perbolæ ALG. ita latus tranſuerſum AB. ſeu MO. ad tranſuerſum MN. Ducantur item diametri AG. NT. & fiat vt exponens Hyperbolæ MVT. ad exponentem Hyperbolæ ALG. (vt in propoſito 4. ad 3.) ita diameter AG. ad partem diametri MR. & per R. ordinatim applicetur RZ. ſecans ſuam Hyperbolen in Z. Dico Hyperbolam ALG. Hyperbolę MZR. eſſe analogam, & habere rationem compoſitam ex ratione altitudinum AG. MR. & parallelarum GL. RZ. Diuidantur AG. MR. in totidem partes æquales in punctis D. E. F. G. & S. P. Q. R. per quæ ducantur ordinatim applicatæ DH. EI. FK. GL. & Sa. PX. QY. RZ. Quoniam tam multiplex eſt GA. ipſius AD. quam
25. 5. MR. ipſius MS. erit vt GA. ad RM. ita DA. ad SM. ſed vt GA. ad RM. ita AB. ad MN. igitur vt AB. ad MN. ita AD. ad MS. & DE. ad SP. & EF. ad PQ. & FG. ad QR. Quare cum ſit vt AB. ad MN. ita AD. ad MS. erit permutando & componendo vt BD. ad DA. ita NS. ad SM. ſimilia igitur ſunt rectangula BDA. NSM. Rurſus cum æ-
25. 5. quales ſint DA. DE. & MS. SP. ex hypotheſi, erit vt ED. ad EA. ita PS. ad PM. & vt BD. ad DA. ita BD. ad DE. itemque vt NS. ad SM. ita NS. ad SP. erit vt BD. ad DE. ita NS. ad SP. ſed vt DE. ad EA. ita SP. ad PM. ergo ex æquali vt BE. ad EA. ita NP. ad PM. ſimilia igitur ſunt rectangula BEA. NPM. Quare cum oſtenſum ſit eſſe BD. ad DE. vt NS. ad SP. erit componendo & per conuerſionem rationis vt BE. ad BD. ita NP. ad NS. & permu-
22. 6. tando vt BE. ad NP. ita BD. ad NS. eruntque duo rectangula ſimilia BEA. NPM. & duo ſimilia BDA. NSM. ſuper 4. proportionalibus BE. NP. BD. NS. conſtituta proportionalia: vt igitur rectangulum BEA. ad rectangulum NPM. ita rectangulum BDA. ad rectangulum NSM. & permutando vt rectangulum BEA. ad rectangulum BDA.
21. 1. Conic. ita rectangulum NPM. ad rectangulum NSM. ſed vt rectangulum BEA. ad rectangulum BDA. ita quadratum EI. ad quadratum DH. & vt rectangulum NPM. ad rectangulum

rectangulum

ctangulum NSM. ita quadratum PX. ad quadratum Sa. 11. 5.
vt igitur quadratum EI. ad quadratum DH. ita quadratum PX. ad quadratum Sa. ideoque vt EI. ad DH. ita PX. 22. 6.
ad Sa. atque eodem modo demonſtrabimus eſſe vt FK. ad EI. & GL. ad FK. ita QY. ad PX. & RZ. ad QY. Quare cum in eadem ratione diuiſæ ſint diametri AG. MR. & parallelæ DH. EI. FK. GL. ipſis Sa. PX. QY. RZ. ſint proportionales; analogæ ſunt Hyperbolæ ALG. MVT. 4. defin. huius.
quæ cum ſint inæquales, & inter diuerſas parallelas habent etiam rationem compoſitam ex rationibus altitudinum AG. MR. & parallelarum proportionalium GL. RZ. 24. huius.
Quod erat demonſtrandum.

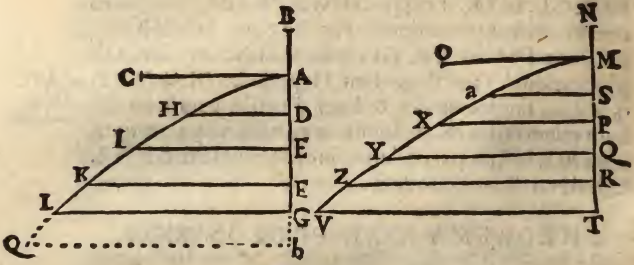
THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXV.

SI Hyperbolæ conchordes rectangulæ prioribuſque æquichordes ſumantur, atque diameter prioris producta ad diametrum poſterioris rationem habeat quam exponens poſterioris ad exponentem prioris: erit prior Hyperbola circa diametrum productam poſteriori Analoga: habebuntque inuicem rationem compoſitam ex rationibus altitudinum, & parallelarum proportionalium.

Sint Hyperbolæ conchordes ALG. MVT. rectangulæ quarum vnaquæque præcedenti ſit æquichordis; atque ordine prior ſit ALG. poſterior quocumque interuallo MVT. ſintque earum exponentes quilibet numeri (exempli gratia prioris 3. poſterioris 4. nempe prior Hyperbola ordine ſit tertia, poſterior quarta) & latera recta æqualia (ex 33. huius) AC. MO. tranſuerſa AB. MN. quæ pro- 33. huius.
portionem habent (ex 33. huius) ab exponentibus deno-

mina-

minatam, nempe vt exponens Hyperbolæ MVT. ad exponentem Hyperbolæ ALG. ita latus rectum AC. ſeu MO. ad tranſuerſum MN. Ducantur item diametri AG. NT.



& fiat vt exponens Hyperbolæ MVT. ad exponentem Hyperbolæ ALG. (vt in propoſito 4. ad 3.) ita diameter AG. producta in d. ad diametrum MT. & producta Hyperbola ad diametrum Ad. ordinatim applicetur de. ſecans Hyperbolam productam in e. Dico Hyperbolam AED. Hyperbolæ MVT. eſſe analogam; & habere dictas Hyperbolas rationem compoſitam ex rationibus altitudinum AD. MT. & parallelarum proportionalium DE. TV. Diuidantur AD. MT. in totidem partes æquales in punctis D. E. F. G. d. & S. P. Q. R. T. per quæ ordinatim applicentur DH. EI. FK. GL. de. & Sa. PX. QY. RZ. TV. Quoniam tam multiplex eſt dA. ipſius AD. quam TM. ip-
15. 5. ſius MS. erit vt dA. ad TM. ita DA. ad SM. ſed vt dA. ad TM. ita AB. ad MN. igitur vt AC. ad MN. ita AD. ad MS. & DE. ad SP. & EF. ad PQ. & FG. ad QR. & Gd. ad RT. Quare cum ſit vt AB. ad MN. ita AD. ad MS. erit permutando & componendo, vt BD. ad DA. ita NS. ad
1. definit. 6. SM. ſimilia igitur ſunt rectangula BDA. NSM. Rurſus cũ
15. 5. æquales ſint DA. DE. & MS. SP. ex hypotheſi, erit vt ED. ad EA. ita PS. ad PM. & vt BD. ad DA. ita BD. ad DE.

item-

itemque vt NS. ad SM. ita NS. ad SP. quare cum ſit vt BD. ad DA. ita NS. ad SM. erit vt BD. ad DE. ita NS. ad SP. ſed vt DE. ad EA. ita SP. ad PM. ergo ex æquali vt BE. ad EA. ita NP. ad PM. ſimilia igitur ſunt rectangula BEA. NPM. Quare cum oſtenſum ſit eſſe BD. ad DE. vt NS. ad SP. erit componendo, & per conuerſionem rationis vt BE. ad BD. ita NP. ad NS. & permutando vt BE. ad NP. ita BD. ad NS. eruntque duo rectangula ſimilia BEA. NPM. & duo ſimilia BDA. NSM. ſuper quatuor proportionalibus BE. NP. BD. NS. conſtituta proportionalia: vt igitur rectangulum BEA. ad rectangulũ NPM. ita rectangulum BDA. ad rectangulum NSM. & permutando vt rectangulum BEA. ad rectangulum BDA. ita rectangulum NPM. ad rectangulũ NSM. ſed vt rectangulum BEA. ad rectangulum BDA. ita quadratum EI. ad quadratum DH. & vt rectangulum NPM. ad rectangulum NSM. ita quadratũ PX. ad quadratum Sa. vt igitur quadratum EI. ad quadratum DH. ita quadratum PX. ad quadratum Sa. ideoq; vt EI. ad DH. ita PX. ad Sa. atq; eodem modo demonſtrabimus eſſe vt FK. ad EI. & GL. ad FK. & de. ad GL. ita QY. ad PX. & RZ. ad QY. & TV. ad QY. Quare cum in eadem ratione diuiſæ ſint diametri AG. MR. & parallelæ DH. EI. FK. GL. de. ipſis Sa. PX. QY. RZ. TV. ſint proportionales; Analogæ ſunt Hyperbolę Acd. MVT. & ex 24. huius habent etiam rationem compoſitam ex rationibus altitudinum Ad. MT. & parallelarum quarumcumque proportionalium de. TV. Quod erat demonſtrandum.

22. 6.

11. 5.

22. 6.

COROLLARIVM.

Ex hac & penultima propoſitione manifeſtum eſt, ſi Hyperbolarum exponentes ordine conſtituantur 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c. primam Hyperbolam eſſe parti ſecundæ circa dimidiam diametrum analogam, eandem parti tertiæ Hyperbolæ

bolæ

bolæ circa tertiam partem diametri; & parti quartæ circa quartam partem diametri, atque ita deinceps analogam; cum exponentes illas partes indicent $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$. &c. Eodem modo ſecundam Hyperbolam eſſe parti tertiæ circa duas tertias diametri analogam, & eandem parti quartæ Hyperbolæ circa duas quartas, & parti quintæ circa duas quintas diametri, analogam, atque ita deinceps, quod exponentes $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{5}$. indicant: ſicque tertiam Hyperbolam eſse parti quartæ circa 3. quartas diametri, & parti quintæ circa tres ſextas analogam atque ita de reliquis vt apparet ex exponentibus $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{6}$. &c.

Præterea conſtat ex vltima propoſitione, primam Hyperbolam productam circa diametrum duplicatam ſecundæ Hyperbolæ, circa triplicatam tertiæ, circa quadruplicatam quartæ Hyperbolæ eſse analogam: quod exponentes $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{4}{1}$ $\frac{5}{1}$ indicant. Item ſecundam Hyperbolen circa diametrum auctam ſeſquialtera proportione, ita vt diameter ad additam habeat rationem ſeſquialteram; ad ſecundam Hyperbolam, & eandem circa diametrum auctam proportione 4. ad 2. id eſt duplicatam, ad quartam; & eandem circa diametrum auctam proportione 5. ad 2. ad quintam Hyperbolam eſse analogam; vt oſtendunt exponentes $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{2}$ $\frac{5}{2}$. atque ita deinceps in infinitum.

FINIS LIBRI QVINTI.

CVRVI AC RECTI

Proportio promota.

LIBER SEXTVS.

TRia ſunt maxime inſignia Ζητήματα, quæ iam inde a naſcentis in Græcia Geometriæ primordijs Mathematicorum ingenia ac laborem exercuerunt, Circuli Tetragoniſmus: eiuſdem in quotlibet partes diuiſio; ac inter duas datas rectas, duarum mediarum proportionalium inuentio. Vltimo huic Pythius ipſe ex tripode occaſionem dedit, cum aram ſuam peſti auertendæ duplicare iuſſit, quod abductione quæſtionis, ſeu ἀπαγωγῆ τοῦ ζητήματος ad eam quæ eſt de duabus medijs proportionalibus fieri poſſe Hippocrates Chius animaduertit: ideoque quæſitum hoc auſpicatiori fato quam reliqua duo, ſolutionem reperit non mechanicam ſolum per varia Meſolabia, quæ præſtantiſſimi Philoſophi ſimul, & Geometræ, Plato, Heron, Philo Bizantius, Apollonius, Diocles, Pappus, Sporus, Architas, atque Eratoſthenes, excogitarunt, ſed etiam Geometricam per duas Parabolas Menæchmi: quod Problema nos ex ſolidorum grege in nobiliorem planorum ac Geometricorum claſſem, initio ſuperioris libri, non temere, ſed validis rationibus moti tranſtulimus. Secundum vero quæſitum feliciſſimos natales, atque exortum habere viſum eſt ex

primo, tertio, & quarto elementorum, cum Circulus cœpit bifariam ſecari a diametro, hinc trifariam trianguli iſopleuri; quadrifariam quadrati: in quinque æquales portiones pentagoni; in ſex hexagoni; in quindecim pentedecagoni inſcriptione: item cum quilibet arcus bifariam, demonſtratione plana; trifariam ſolida diuiſus eſt; vt tamen idem vniuerſale euaderet nulla Geometrarum induſtria, nullo ingenij conatu perfici potuit, ſed veluti ſydere quodam afflatum ita repente vigor eius exaruit, vt nullum ne minimum quidem multorum ſæculorum decurſu cœperit incrementum.

Primi deterior adhuc conditio: nam licet a præſtantiſſimis Geometris iam ab antiquis temporibus omni opera excultum, fieri tamen non potuit, vt vllo Problemate ſeu Mechanico, ſeu Geometrico, plano, ſolido, vel lineari vel primi eius ſurculi excluderentur. Nihil dum in eo ſtatui, nihil determinari hactenus potuit, ſed quæcumque de eo demonſtrata ſunt quibuſdam hypotheſibus innituntur, quæ num inter ἀπορημένα *tantum, an etiam inter* ἀδύνατα *recenſenda ſint, vix quiſquam audeat affirmare. Ad hoc vero Problema priſcos illos excitauit, vt Proclo viſum eſt, quadrageſima quin-*

Proclus in 45. element.

ta elementorum, qua dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituitur in dato angulo rectilineo; aut, vt ego quidem exiſtimo, vltima ſecundi, qua dato rectilineo æquale quadratum deſcribitur. Si enim illa fieri poſſunt, quæſtione quoque dignum eſt, num rectilineæ figuræ curuilineis æquales oſtendi queant. Primi qui lapidem hunc mouerunt circuli aream quam Græci ἐμβαδὸν *vocant, quadrati, aut rectilineæ figuræ ſpatio exæquare, ac certa proportione comparare conati ſunt: quorum antiquiſſimus, vt Ioſepho Scaligero placet (cui viro tantum in humanioribus fidei conciliat inſignis eruditio, quantum in Geometricis detrahit craſſiſſima ignoratio) fuit Bryſo, hinc Antipho, quos excepit valentior ſecutor, non Oenopides Chius, vt perperam ex Proclo deducit Buteo in ſuo*

Papp. in 1. Phyſic.

de circuli quadraturis tractatu, ſed eiuſdem nationis Hippocrates, ex mercatore & naufrago inſignis Geometra, ac Philoſophus. Priores duos nihil magis notos reddidit quam magni Philoſophi iuſta repræhenſio, qua eorum pſeudotetragoniſmos identidem inceſſit; Poſtremus acutiſſimo epicheremate (o lippum oculis male inunctis Scaligerum, qui hic acumen nullum ſe videre, & inuentum hoc rem vulgatiſſimam, ac cuiuis Geometriæ tyroni parabilem aſſerit,) μηνίσκους, *ſeu Lunulas quadrauit, hinc cum veluti concepto ſemi-*

ne

ne in circuli tetragoniſmum eniteretur, abortum ψευδάριον effudit, adeo tamen eleganti, & ad veritatis ſpeciem conformato aſpectu, vt vel parenti ſuo placuerit, cui licet notum eſſet nothum eße, ac mancum ſuum partum; qui enim id ignoraret elementorum ſcriptor doctiſſimus, & ἀπαγωγῆς ſeu abductionis inuentor acutiſſimus? pro legitimo atque perfecto venia haud omnino indigna φιλαυτία, obtendere conatus eſt. Horum authorum paralogiſmos poſteris tradiderant, qui non extant, Eudemus in hiſtoria, & Ceria Ariſtotelica, teſte Eutocio Aſcalonita in Archimedem de dimenſione circuli, ex quibus forte deſumpſerunt qui extant Alexander Aphrodiſæus, ac Simplicius & ex ijs Buteo in circuli quadratura, & Blancanus in Ariſtotelis locis Mathematicis, quos adeat qui volet.

Cum igitur hæc via τῦ ἐμβαδῦ nullum videretur exitum habere, aliam inijt Dinoſtratus eius Menechmi frater qui circa conicas ſectiones primus verſatus eſt, ac Eudoxi diſcipulus fuit, paulo, vt videtur, poſt tempora Platonis, ac contemplationem a circuli area ad peripheriam tranſtulit cui æqualem lineam rectam inueſtigauit curua quadam per duplicem motum deſcripta quam τετραγωνίζουσαν ipſe, Scaliger Quadratariam, Commandinus Quadrantem, Clauius Quadratricem appellat, tunc forte ſubodoratus, quod poſtea Archimedes demonſtrauit, omnem circulum triangulo rectangulo æqualem eſſe, cuius quidem vna earum quæ exeunt a centro ad circumferentiam linearum vni ex ijs quæ circa rectum angulum ſunt trianguli lateribus, ambitus vero baſi æqualis eſt. Sed ex hoc modulo Problema nullum quod ad rem faceret excudi potuit; Theorema hinc quidem prodijt hypotheticum, quo, ſi detur vltimum Quadratricis punctum, probatur futurum vt detur circumferentia circuli datæ rectæ æqualis. at vero punctum illud exiſtere nulla ratione poſſe recte animadnertit Pappus Alexandrinus lib. 4. Collectionum Mathem. Prop. 25. (neſcio quo authore idem Sporo tribuerit Scaliger) & nos poſtea demonſtrabimus; quare non certiori fiducia ſperandum eſt ex hac hypotheſi circulum quadrari, quam bouem ratiocinari poße ex hac conditionali, quod ſi bos eſſet animal rationis particeps ratiocinaretur, cum bouem eße animal rationale, fieri nullo modo poſſit. Excogitatæ ſunt & aliæ τετραγωνίζουσαι quas Hippias antiquus Geometra in vnum volumen coniecit, in quarum ordinem etiam τὴν ἕλικα ſeu volutam in plano allegit ingenioſiſſimus Archimedes, hoc demonſtrato, Ioſ. Scalig. Proclus l. 3. p. 3.

quod a Conone propoſitum fuerat; ſi lineam ſpiralem recta linea contigerit in vltimo ipſius ſpiralis termino, alia autem recta a puncto manente ducatur perpendicularis ſuper lineam circumductam, reſtitutamque in priorem locum, ita vt cum contingente coëat: erit hæc linea circumferentiæ circuli æqualis; cuius tangentis inueniendæ maior ſpes affulget, quam vltimi quadratariæ puncti, cum nihil quod huic inuentioni repugnet hactenus appareat. Tandem cum abditiſſima huic recti & circularis analogiæ peruestigandæ impar Geometriæ ſagacitas crederetur, placuit Archimedi in conſilium adhibere Numeratricem, cuius ope depræhendit cuiuslibet circuli ambitum diametri eſſe triplum, & adhuc ſuperare parte quapiam quæ quidem minor eſt ſeptima diametri, maior autem decem ſeptuageſimis primis; ſatis hæc quidem accommodate, vt recte annotauit Heraclides in Archimedis vita apud Eutocium in Archimedis circuli dimenſionem πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας, *ad humanæ vitæ vſum, excogitata ſunt, illarum tamen quantitatum rationem haud exacte; expreſſerunt. Quare Apollonius Pergæus* ἐν τῷ ὠκυτοβόῳ, *& Philo Gadareus ex antiquis ad exactiores numeros rem adduxerunt, recentiores vero eo continuo circuli* τετραγωνισμῷ, *peruenerunt, vt eius perimetrum inter duo polygona* 25165824 *0, angulorum, quorum alterum inſcriptum, alterum circumſcriptum intelligatur ſitque illud partium* 62831853071795861. *iſtud* 62831853071795863. *quarum diameter eſt* 20000000000000000. *poſitum eſſe demonſtrarint, imo audio ad maiores numeros calculum increuiſſe, operoſo quidem ſed ſuperuacuo vt reor, ac ſeruili labore; vt qui neq; ad vſum conferat, neq; acu exactam proportionem attingat: Et qui id poſſit numerus, vbi forte diameter & peripheria, itemque circuli ac cuiuſuis polygoni areæ magnitudines ſunt* ἄλογοι, *ſeu irrationales, quæ Geometricè, non Arithmeticè exponi poſſunt? Atque hæc antiquiores Geometræ; Neque vero fæliciorem ſucceſſum recentiorum, qui hoc ſaxum volutarunt, conatus habuerunt; imo eo peius illis hæc ceſſit opera, quo illi veteribus & doctrina, & ingenio longius agnoſcuntur inferiores. Quid? quod ab illis temporibus neminem paulo melioris notæ Geometram, ſed aut triobolarios, aut plæroſque omnes matheſeos penitus ignaros in hoc argumento verſatos deprehendo? Quo enim alio nomine digneris Arabas illos apud Butionem Campanum, Brauardinum, Nicolaum Cuſanum, Orontium, Bouillium, Durerum, Fortium, & poſt hos aliorum*

Adrians Romanus idæis Mathem.

rum

num ignobilem turbam,quibus piget me annumerare Io. Baptiſtam Portam, virum alioquin raræ, ac multiplicis doctrinæ, qui in ſuo de elementis curuilineis libro, dum Arcadum more ex lunulis nobilitatem aucupatur, ac Hippocratis incudem tundit, infelix faber ſibi notam inuſſit, ac nulla re, quæ memoriam mereatur, inuenta, vt recte Io. Camillus Glorioſus in exercitationibus Mathematicis oſtendit, multo grauiore, quam ille, lapſu a propoſito excidit. Neque admodum honoratiore loco reponendum cenſeo Philippum Landſbergium, qui cum nouæ ſuæ Cyclometriæ fundamentum iaciat minime Gemetricum, falſum, ſubſtructioni haud idoneum, eam tamen veritati, & Gemetriæ Principijs magis conſentaneam quam omnium Gemetrarum qui preceſſerunt aſſerere non veretur, ac ſibi ipſi gratulatur, totiſque manibus applaudit, quod tetragoniſmum tot ſæculis, totque a Geometris ſummo ſtudio, ac labore quæſitum nunc primum ſummo Dei beneficio inuenerit. Adeo nobis noſtri illudit amor, ac magico veluti faſcino mentis oculum inficit, vt proprij partus Therſite licet deformiores, Achille tamen formoſiores eſſe, & πρῶτον εἶδος ἄξιον τυραννίδος habere videantur. Sed horum omnium inſcitiam infinito per interuallo ſuperauit Ioſephus Scaliger bipedum omnium quotquot fuerunt,ſunt, & erunt (hoc cum elogio vir quidam doctiſſimus illuſtrat) ne Orontio quidem Finæo excepto ἀγεωμετρητότατος, in ſuis elementis Cyclometricis: quæ cum perlegerem mirum quam varij animum motus affecerint, ira, indignatio, admiratio, riſus, commiſeratio.

Cyclom.lib. 1. p. 1.

Priſ. 1. lib. 1.

Quis æquo animo ferat Philologum Dictatoriam poteſtatem, camque impotentiſſime in doctiſſimos Philoſophos, ac Mathematicos exercere? Quis ſuſtineat Archimedem Lynceum Geometram, ac centimanum machinatorem tanquam aduerſus ὀφθαλμίαν, ac χειρουργίαν peccantem traduci, viliſſimo ciſiario vel aurigæ comparari, inſcitiæ, & admiſſorum in apodixibus ἀτοπημάτων ac ψευδαρίων accuſari; affectatæ per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον (quam etiam alibi ſcopulum vocat Scaliger) in Geometria Tyrannidis inſimulari? Quis ſine bile vel ipſius furentis Herculis audiat, Dinoſtratum tanquam nominis falſarium in τετραγωνίζουσῃ infamari? Platonem, Heronem Alexandrinum Mechanicum, Philonem Bizantium, Apollonium Pergæum oſtentationis argui; Eratoſthenis μηχάνημα ad cubi duplicationem excogitatum, & Nicomedis canonium irrideri? Cui ſtomachum non faciat vaniſſimi hominis

In Polegom. Cyclometræ.

In Prolegom. meſchalij.

ἀλα-

ἀλαζονεία qua a ſe priſcos omnes vinci iactat, quod omnia, non παραλογιστικῶς, vt illi, ſed κατὰ τὸν ἐπιστημονικὸν λόγον demonſtrarit? Quis non vel Niobeo ſtupore ſtupeat eo ſtuporem hominis perueniſſe, vt aſſerat Helicen ſiue volutam ex ſedecim, quadratricem duplicatam ex 8. circulorum peripherijs conſtare. Ambitum dodecagoni circulo inſcribendi plus poſſe quam circuli perimetrum, Quadratum ab ambitu circuli (qui error fuit Arabum apud Buteonem) decuplum eſſe quadrati à diametro; Parabolam ad triangulum in eadem baſi, eademque altitudine conſtitutum rationem habere ſeſquitertia minorem, & alia huiuſmodi λῆρα pene infinita, quorum vt quædam Adrianus Romanus, Barleduchius, Cataldus & alij annotarunt, ita vix ſingula numero retulerit, qui ſingula operis verba in cenſum aduocarit? Cui vel rigidiſſimo Heraclito riſum non excutiant non tantum rubricatæ pagellæ, & ad falſitatis fucum potius quam veritatis ornatum purpuriſſo eleganter interſtinctæ, ſed etiam grandis ille ellipſoidem, volutarum, ſecuricularum, Scalprorum apparatus, ad magnificam quamdam Problematum ſubſtructionem, in qua tandem non nobilis ἀποδείξεων chorus degat, ſed viliſſima ſophiſmatum turba niduletur? Denique quem non miſereat hominis, qui ante ſecunda adeo exiſtimationis aura, tum propria tum paterna eruditione excitata honori atque gloriæ velificatus fuerat, momento in ipſo pene portu naufragium feciſſe, & partam tot alijs operibus laudem vno opuſculo decoxiſſe. Sic habeant qui vltra ſobrietatem, & crepidam ſapere volunt, & qui mediæ regionis limites egreſſi in eam temerario auſu tranſcendere conantur, in qua cum maioris ſplendoris efficaciam non robuſtioribus Philoſophiæ neruis colligatæ ſed fluxa Philologiæ ceratura compactæ ingenij alæ ferre non valeant, ſolutæ tandem impar viribus onus in dedecoris pelagus deponunt, ac Icario lapſu vectoribus ſuis æternum ex ignominia nomen acquirunt. Scio quid hominem excuſare poſſit, longus ſcilicet, vt ipſemet ait, ac moleſtus morbus non tantum corporis ſed etiam animi, a quo nondum ſeſe receperat cum illa ſcriberet: apparet ita rem habuiſſe, eamque ægritudinem mentis lyenteriam fuiſſe, ex qua tam ſordidæ paralogiſmorum deiectiones, ac fœdiſſima linguæ calamique proluuies, qua chartam verius, quam, quod maxime volebat, Archimedis, aliorumque præſtantiſſimorum Mathematicorum famam deturpauit. Sed heus tu, inquies, itane in defunctum ſæuis, ac tan-

In dedicatoria Cyclometria.

Scal. Cyclomet. lib. 1. ad lectorem.

Plin.

quam

quam larua cũ mortuis luctaris, aut inſtar nocturni latronis innocuũ cadauer expolias? annon times ne te manium eius vltrix aliquis ſtylus, vt olim Niconis ſtatua æmulum opprimat? Teſtor ſuperos me non maleuolentia adductum calamum armaſſe, quæ enim mihi ſimultas eſſe poſſit cum homine clariſſimo, ignoto, mortuo? ſed veritatis quæ opprimitur, pręclariſſimorum virorum quorum fama læditur, denique totius Reipublicæ Mathematicæ, ac tui etiam amore, mi Lector, qui pellaci hominis facundia, tanquam Sirene, in altos errorum ſcopulos attrahi fortaſſe poſſes, ni eſſet qui inclamaret. Plato 5. de Rep. Suidas, & Pauſanias.

Heu fuge fallaces terras. Virg. 2. Æn.

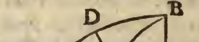
efficeretque vt in tutiorem ſtationem ſtudiorum curſum auerteres. Immo ſtatueram totum illud opus tanquam Augiæ ſtabulum ſingulis erroribus expurgare, ſed cum animaduertiſſem eos ſua multitudine vel Herculeum laborem ſuperaturos, cæptis deſtiti, contentus ad communem vtilitatem eos digito indicaſſe. Atque hæc non omnino παρέργως; *Vt vero ad ſuam ſemitam orationis curſus redeat, ex dictis efficio tam circuli in quotlibet partes diuiſionem, quam eiuſdem tetragoniſmum inter porima nondum aſcitam eſſe, ſed vt Marinus antiquus Gemetra annotauit, adhuc inter* ἄπορα *recenſenda. Vtrum vero eadem* ποριςθὰ *ſint, ac fieri tandem poſſit vt aliquo Problemate ſoluantur ſi quæras, reſpondebit Philoponus* ἐν ὑςέροις *neutrum antiquos Geometras aggreſſuros fuiſſe, ni fieri poſſe iudicaſſent. Recte; ſed quid ſi eos ſua fefelliſſet opinio? Nos ergo, vt tandem ad inſtitutum noſtrum in hoc libro veniamus, oſtendemus non tantum ex natura rei poſſibile, ſed etiam per media Geometrica demonſtrabile eſſe vtrumque quæſitum. Hinc Dinoſtrati quadratricem extra circulum productam ad legitimum tetragoniſmi vſum non per vltimum eius punctum, ſed per tangentem nouo inuento aptabimus: mox lineas ad vtrumque munus obeundum plures delineabimus, pluresque conditiones demonſtrabimus, quarum qui vel vnam aliquando ad effectionem Geometrico Problemate deduxerit, is etiam totum hoc negotium effectum dederit. Denique ex huiuſcemodi verius linearum figmentis, quam lineis varia Problemata efformabimus, quæ non leuem etiam in Geometricis vſum ſunt habitura.* Marinus in data Euclidis.

DEFINITIONES.

I.

SI circa diametrum Quadrantis manens alter radiorum, qui angulum rectum compræhendunt, ita conuertatur, vt punctum à centro per radium, & extremitas per circunferentiam Quadrantis eadem proportione moueantur: deſcribet punctum ex centro lineam curuam, quæ *Spiralis Quadrantis*, dicatur.

Sit quadrans ABC. cuius centrum A. radius AC. rectum angulum cum AB. compræhendens; extremitas in Quadrantem deſinens C. Conuertatur AC. circa A. ac moueatur A. punctum in F. & punctum C. in E. ita vt quæ ratio AF. ad AC. ſeu AE. Eadem ſit CE. ad CB. item vt AG. ad AD. id eſt, AC. ita ſit CD. ad CB. atque ea proportio in toto motu ſeruetur: deſcribet punctum motum ex A. lineam curuam AFGB. quæ vocetur Spiralis Quadrantis. Eſſe autem ſpiralem conſtat ex Archimede ad propoſit. 11. de lineis ſpiralibus, & Pappo Alexandrino ad propoſit. 18. lib. 4. collectionum mathematicarum; eſtque quarta pars (habita ratione temporis, & motus) ſpiralis integra reuolutione deſcriptæ, & radius AC. quarta pars rectæ lineæ quam in prima circulatione punctum pertranſit.



Pars

I I.

PArs lineæ rectæ inter principium ſpiralis, & lineam ſpiralem, vocetur *Radius Spiralis*: & radius compræhendens vtrumque extremum dicatur *Diameter Spiralis.*

Vt rectæ AF.AG.AB.inter punctum A. quod eſt principium lineæ ſpiralis (ex Archimede ad 11.prop.de lineis ſpiralibus) & lineam ſpiralem AFGB.interceptæ dicantur Radij ſpiralis: & AB.vtrumque extremum connectens, Diameter Spiralis.

I I I.

PErpendiculares à punctis, vbi ſpiralem eius radij ſecant, in latus Quadrantis erectum, ſeu diametrum ſpiralis ductæ dicantur *Sinus Spiralis:* atque omnium maximus (augentur enim à principio vſque ad maximum, à quo rurſus deficiunt, vt oſtendetur poſtea) dicatur *Sinus Spiralis maximus.*

Vt perpendiculares à punctis F.I.in latus AB.dicantur ſinus ſpirales: & ſi omnium maximus ſit FI. hoc nomine compelletur.

I I I I.

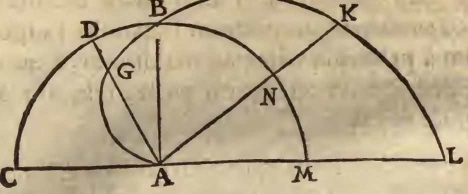
RVrſus quælibet pars ſpiralis dicatur *Spiralis partialis:* & recta eius extrema complectens *Diameter;* habeatque ſuos radios ac ſinus, inſtar ſpiralis quæ deſcribitur in Quadrante.

Vt AFG. eſt Spiralis partialis, cuius Diameter AG. vnus radiorum AF. Sinus AI.

V.

QVod ſi ſupradictus motus continuetur, ita vt extremitas ſemidiametri arcum ſemicirculi, punctum vero a centro lineam diametro æqualem ſimiliter percurrat, deſcribetur ſpiralis ſemicirculi, quæ erit dimidia pars (habita ratione temporis & motus) ſpiralis integra reuolutione deſcriptæ.

Vt ſi extremitas ſemidiametri moueatur per B. in N. & punctum a centro in K. ita vt ſit ea ratio AB. ſemidia-



metri ad rectam AK. quæ Quadrantis CB. ad arcum CBN. continuabitur ſpiralis ab A. in K. atque ita deinceps vſque in L.

VI.

NOn aliter in Quadratricibus, Radij dicantur qui a centro circuli, in quo deſcribuntur, ad lineam Quadratricem; ſinus qui à punctis vbi radij Quadratricem ſecant, perpendicula-

diculares ad alterum latus Quadrantis, & ad alterum paralleli ducuntur: quæ omnia ex demonſtrationibus apparebunt.

SCHOLIVM.

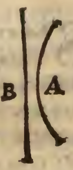
Sed audio Pappum Alexandrinum Collect. lib. 4. p. 24. huiuſmodi lineas reprahendentem, quod per ignotam adhuc, atque irrepertam circuli, & rectæ proportionem deſcribantur. Recte id quidem, ſi ea proportio etiam τῶν ἀδυνάτων numero contineretur, neque κατὰ τὴν φύσιν poſſibilis eſset. At vero res eſt haud inſolens, tum in Phyſicis, tum in Mathematicis, vt ex ijs quæ non ſunt, eſſe tamen poſſunt, quid futurum ſit, fieriue poſſit hypotheticè demonſtretur. Latet adhuc ratio inueniendarum, inter duas datas, duarum mediarum proportionalium, quod tamen inueniri queant, indicant varia Meſolabia a præſtantiſſimis Geometris, apud Eutocium, excogitata. Hinc non abſurde licet argumentari: Si inter duas datas duæ mediæ proportionales reperiantur, erit cubus primæ ad cubum ſecundæ, vt prima ad quartam; at vero impoſſibilis non eſt illa inuentio, igitur poteſt eſſe ratio cubi ad cubum quæ datarum linearum. Quare ſi oſtenderimus poſſe lineam rectam, ac circulum in eaſdem rationes ſecari, non inepte Helicum, & Quadratricum deſcriptionem inſtitutam eſſe probabimus. Si enim fieri poſſit hæc diuiſio, etiam puncta tam in linea recta, quam in circulo mota, modo ſupradicto, partes proportionales auferre poſsunt; ideoque lineam Spiralem, Quadratricem, Diuiſiuam, delineare. Ac proinde, quæ inde efficientur demonſtrationes, non quidem ex datis procedent, ſed ἐκ τῶν ποριστῶν ex quibus non minus certo quantitatis affectiones, quam ἐκ τῶν δεδομένων comprobabuntur. Quod vero poſſibilis ſit proportionalis hæc diuiſio, ſequentibus duobus Lemmatis oſtendemus.

Poſtulatum.

Lineam curuam extendi poſſe.

LEMMA I.

SI linea curua extendatur, vt extendi amplius non poſſit; erit linea recta.



Linea recta A. extendatur, ita vt amplius extendi non poſſit, ſitque hoc modo extenſa B. Dico B. eſſe lineam rectam. Si enim B. non ſit linea recta, erit curua, at linea curua extendi poteſt; Igitur B. extendi poteſt; at ſupponebatur non amplius poſſe extendi. Quod eſt abſurdum. Igitur B. eſt linea recta. Quod erat demonſtrandum.

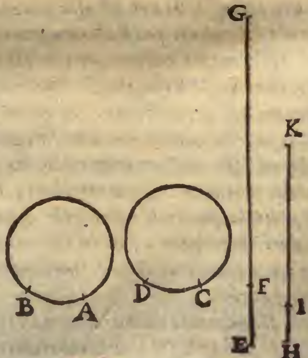
Poſtulatum huius.

LEMMA II.

POteſt data linea recta dati circuli perimetro ſimiliter ſecari.

Sit data recta HK. & datus circulus AB. Dico rectam HK. poſſe ſecari ea proportione, qua ſecantur peripheria circuli AB. Sumatur in circulo AB. pars AB. cui in æquali circulo ſumatur pars æqualis CD. ac extendatur perimeter circuli CD. quantum poteſt, migrabit in lineam rectam, quæ ſit EG. in qua remaneant eadem diuiſionis puncta, quæ erant

Lemm. 1. huius.

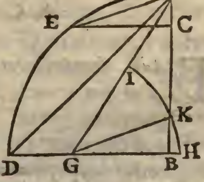


in circulo: videlicet E. F. puncta ſint eadem punctis C. D. Hinc data HK. rectæ EG. ſimiliter ſecetur in I. Quoniam eſt vt KH. ad HI. ita GE. ad EF. & vt GE. ad EF. ita peripheria tota circuli CD. ad partem CD. (eſt enim proportio æqualitatis, cum tota EG. ſit peripheria ipſa totius circuli extenſa, & EF. pars rectæ EG. ſit eadem parti CG.) & vt peripheria tota circuli CD. ad partem CD. ita peripheria totius circuli AB. ad partem AB. ergo vt KH. ad HI. ita peripheria circuli AB. ad partem AB. linea igitur data HK. dati circuli AB. perimetro ſimiliter ſecari poteſt. Quod erat demonſtrandum. 10. 6.

LEMMA III.

MAior eſt ratio ſinus totius ad ſiuum verſum arcus Quadrante minoris, quam peripheriæ Quadrantis ad dictum arcum.

In circulo cuius centrum B. ſit peripheria Quadrantis DF. arcus minor Quadrante EF. ductis ſinibus rectis DB. EC. erunt BF. CF. ſinus verſi, & BF. etiam ſinus totus, qui cum ſit maior quam EC. accipiatur in æquali BD. recta BG. æqualis ipſi EC. item cum ſit maior quam CF. accipiatur BK. æqualis CF. & connectantur DF. EF. GF. GK. ac centro G. diſtantia GK. deſcribatur circulus HKI. ſecans DB. productam in H. & GF. in I. Dico maiorem eſſe rationem BF. ad FC. quam DF. arcus ad arcum FE. Nam quia in triangulis GBK. ECF. rectangulis ad B. C. æqualia ſunt latera GB. BK. lateribus EC. CF. ex hypotheſi, erunt anguli BGK. CEF. æquales. Iam vero maior 4. 1.



ior

8. 5. ior eſt ratio ſectoris GHK. ad ſectorem GKI. quam eiuſdem ſectoris GHK, ad triangulum GKF. & ſectoris GHK. ad triangulum GKF. maior eſt ratio, quam trianguli GBK. ad idem triangulum GKF, ergo a primo ad vltimum, ma-
33. 6. ior eſt ratio ſectoris GHK. ideſt arcus HK. ad ſectorem GKI. id eſt ad arcum KI. quam trianguli GBK. id eſt rectæ BK, ad triangulum GKF. id eſt ad rectam KF. & compo-
1. 6. nendo & per conuerſionem rationis minor ratio IH. ad
33. 6. HK. id eſt anguli FGH. ad angulum KGH. quam rectæ
16. 1. FB. ad rectam BK. ſed angulus BDF. internus minor eſt
8. 5. externo FGH. Igitur minor eſt ratio anguli BDF. ad angulum BGK. id eſt ad angulum CEF, qui modo oſtenſus eſt ei æqualis, quam anguli FGH. ad angulum KGB. id eſt, CEF. Cum ergo minor ſit ratio anguli BDF. ad angulum BGK. id eſt CEF. quam anguli BGF. ad angulum BGK. id eſt CEF. & minor ratio anguli BGF. ad BGK. angulum, id eſt ad CEF. quam FB. ad BK. erit a primo ad vltimum, minor ratio BDF. ad CEF. quam FB, ad BK. id eſt, quam FB, ad FC. ſunt enim poſitæ æquales BK. & FC. ſed vt angulus BDF. ad angulum CEF. ita arcus DF,
15. 5. 20. 3. ad arcum EF. (ſunt enim dicti anguli dictorum arcuum, aut potius angulorum arcubus ſubtenſorum dimidij) maior igitur eſt ratio BF. ſinus verſi arcus DF, id eſt, ſinus totius ad CF. ſinum verſum arcus EF. quam arcus maioris DF. nimirum Quadrantis ad arcum EF, Quadrante minorem. Quod erat &c.

SCHOLIVM.

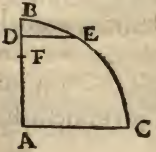
Eadem demonſtratio fieri poteſt, ſiue HD. ſit ſinus totus, ſiue non; modo ſit maior quam ſinus CE. vt manifeſte apparet ex figura. Hoc autem aliter demonſtrauimus lib. primo theoremate 30. Sed præſentem dimonſtrationem quia elegantior viſa eſt, addere voluimus.

LEM-

LEMMA IIII.

SI peripheria Quadrantis, eiuſque latus erectum, a puncto in quo coëunt ſimiliter diuidantur: perpendicularis a termino arcus proportionalis in latus demiſſa aufert ex latere, verſus eius extremum, partem minorem parte proportionali lateris.

Peripheria Quadrantis BC. cuius centrum A. & latus erectum AB. ex puncto B. vbi coëunt ſimiliter diuidantur, id eſt, ſit BC. ad BE. vt BA. ad BF. & a termino E. arcus proportionalis BE. demiſſa in latus AB. perpendicularis



ED. auferat partem DB. Dico DB. eſſe minorem quam FB. Nam cum DB. ſit ſinus verſus arcus BE. maior erit ratio ſinus totius AB. ad ſinum verſum DB. quam peripheriæ Quadrantis BC. ad arcum BE. ſed vt peripheria Quadrantis BC. ad arcum BE. ita ex hypotheſi eſt AB. ad BF. maior igitur eſt ratio AB. ad BD. quam AB. ad BF. minor igitur eſt DB. quam FB. Quod erat demonſtrandum.

Lemm. 3. huius.

10. 5.

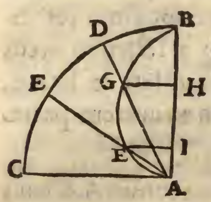
THEOREMA I. PROPOS. I.

RAdij Spiralis Quadrantis ſunt in ratione, in qua ſunt arcus Quadrantis inter eoſdem radios ad peripheriam productos, & baſim eiuſdem Quadrantis comprænenſi.

Sit Quadrans ABC. cuius Spiralis AFGB. radij Spiralis AF. AG. qui producti ſecent peripheriam Quadrantis in punctis E. D. Baſis Quadrantis AC. latus eiuſdem erectum,

ctum, ſeu diameter Spiralis AB. Arcus inter baſim AC. & puncta E. D. compræhenſi ſint EC. DC. Dico eſſe vt AF. ad AG. ita arcum CE. ad arcum CD. Eſt enim, ex

defin. 1. huius.

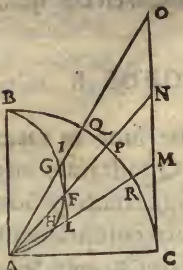


deſcriptione, ſeu definitione Spiralis, vt AF. ad AC. ita arcus CE. ad arcum CB. & vt AG. ad AC. ita CD. ad CB. & conuertendo vt AC. ad AG. ita CB. arcus, ad arcum ad arcum CD. ergo ex æqualitate vt AF. ad AG. ita arcus CE. ad arcum CD. Quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA II. PROPOS. II.

SI diametro Spiralis in Quadrante parallela eandem Spiralem contingat: ſecans per punctum contactus ducta ad ſuum arcum minimam inter omnes ſecantes proportionem habet.

Sit Quadrans ABC. cuius Spiralis AFB. ac Spiralis diameter AB. cui parallela ſit recta LI. quæ Spiralem tangat in F. puncto, per quod ex centro A. Quadrantis ducatur AFN. ſecans arcus CP. occurrens tangenti CN. eiuſdem arcus, & parallelæ ipſi AB. in puncto N. Dico ſecantem AN. ad ſuum arcum CP. minorem habere proportionem, quam habeat quælibet alia ſecans ad ſuum. Ducantur quælibet aliæ ſecantes vltra citraque AO. AM. quarum illa ſecet Quadrantem in Q. iſta in R. iſta rectam LI. quantumlibet productam



ductam in I. iſta in L. (ſecabunt autem, cum ei parallelam CO. ſecent in M. & O.) illa ſpiralem in G. iſta in L. Quoniam recta LI. ſpiralem tangit in P. in illo tantum puncto tanget: Cadent igitur puncta I. L. ideoque partes GI. HL. extra ſpiralem. Cumque in triangulo OAN. parallelæ ſint ON. IF. erit vt OA. ad IA. ita NA. ad FA. & permutando, OA. ad NA. vt IA. ad FA. maior autem eſt ratio IA. ad FA. quam GA. ad FA. Igitur maior eſt ratio OA. ad NA. quam GA. ad FA. vt vero GA. ad FA. ita arcus QC. ad arcum PC. Igitur OA. ad NA. maior eſt ratio, quam arcus QC. ad arcum PC. & permutando ſecantis OA. ad ſuum arcum QC. maior eſt ratio, quam ſecantis NA. ad ſuum arcum PC. Eodemque modo oſtendetur, maiorem eſſe rationem ſecantis MA. ad ſuum arcum MC. quam ſecantis AN. ad ſuum PC. Idemque ſequetur in qualibet alia ſecante: ergo ſecans NA. ad ſuum arcum PC. minimam inter omnes ſecantes proportionem habet. Quod erat oſtendendum. Vocentur autem puncta F. P. minimæ proportionis in Spirali, & in quadrante: & ſecans AN. minimæ proportionis.

Proclus in 29. 1. Archim. p. 13. de lineis ſpiralibus. 2. 6. 8. 5. 13. 5. 1. huius.

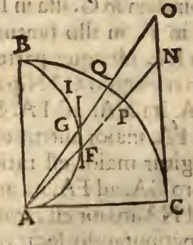
THEOREMA III. PROPOS. III.

SEcans minimam ex cæteris ſecantibus ad ſuum arcum proportionem habens ſpiralem Quadrantis diuidit in puncto, per quod parallela diametro ſpiralis, ſeu tangenti Quadrantis ducta dictam ſpiralem contingit.

Sit Quadrans ABC. in quo ſecans AN. occurrens tangenti Quadrantis CO. in puncto N. ſecans Quadrantem in P. Spiralem Quadrantis in F. habeat ad ſuum arcum PC. minimam ex cæteris ſecantibus rationem: ac per punctum F. ducatur FGI. parallela tangenti CO. Dico quod

Bbb recta

recta FGI. ſpiralem tangit in F. Si enim non contingit, ſecet in punctis F. G. ita vt FGI. ſit vna recta ipſi CO. parallela, & ducatur per punctum G. ſecans AO. occurens tangenti in O. & Quadranti in Q. Quoniam parallela ponitur FGI. ipſi CO. erit vt OA. ad AG. ita NA. ad AF. & permutando vt OA. ad NA. ita AG. ad AF. ſed vt AG. ad AF. ita arcus QC. ad arcum PC. ergo vt OA. ad NA. ita arcus QC. ad arcum PC. & permutando, æqualis erit proportio OA. ad ſuum arcum QC. proportioni NA. ad ſuum arcum PC. Quod eſt abſurdum, cum proportio NA. ad arcum PC. ponatur minima qualibet proportione alterius ſecantis ad ſuum arcum. Igitur ſecans minimam ex cæteris &c. Quod erat probandum.



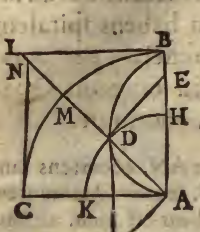
2. 6.

1. huius.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

TAngens complementi arcus, ad quem eiuſdem ſecans minimam habet rationem, eſt æqualis arcui.

Sit Quadrans ABC. cuius tangens CN. ſecans AN. arcus CM. minimam cum eo proportionem habens, ac ſecans ſpiralem Quadrantis ADB. in puncto D. ſitque arcus CM. complementum arcus MB. cuius tangens BL. Dico tangentem BL. eſſe æqualem arcui MC. Centro A. per punctum D. deſcribatur Quadrans KDH. & per idem punctum D. ducatur infinita



finita

finita DF. parallela tangenti CN. atque ex puncto A. ad DA. ducatur perpendicularis AF. quæ occurret ipſi DF. in F. Denique ducatur DE. perpendicularis ad DA. ideoque tangens arcus DH. Conſtat rectam AF. eſſe æqualem arcui DK. Rurſus quoniam in Quadrilatero AEDF. anguli EDA. DAF. ſunt recti, parallelæ ſunt DE. FA. Sed & parallelæ ſunt DF. EA. vtraque enim ponitur parallela ipſi CN. Igitur parallelogrammum eſt AEDF. & oppoſita latera AF. DE. æqualia. Quare cum AF. ſit æqualis arcui DK. erit DE. etiam æqualis arcui DK. Vt autem arcus KD. ad Quadrantem KH. ita arcus CM. ad Quadrantem CB. & permutando, vt arcus KD. ad arcum CM. ita Quadrans KH. ad Quadrantem CB. & vt Quadrans KH. ad Quadrantem CB. ita ſemidiameter AD. ad ſemidiametrum AM. & vt AD. ad AM. ita DE. ad BL. (nam cum æquiangula ſint triangula EDA. LBA. ob communem angulum ad A. & rectos ad D. B. erit vt AD. ad DE. ita AB. ad BL. & permutando) erit a primo ad vltimum, vt arcus KD. ad arcum CM. ita DE. ad BL. & permutando, vt arcus KD. ad rectam DE. ita arcus CM. ad rectam BL. eſt autem probatus arcus KD. æqualis rectæ DE. igitur arcus CM. æqualis eſt tangenti complementi BL. Quod erat demonſtrandum.

19. Spiral. Archimed.
20. Spiral. Archimed.
27. 1.
30. 1.
35. definit.
34. 1.
Schol. 33. 6.
Pappus l. 8. p. 22. & p.
15. 5. elem.
32. 1.
4. 6.

SCHOLIVM.

Hinc manifeſtum eſt, ſi problemate aliquo Geometrico ſecans minimæ proportionis reperiatur, ſequi tangentem complementi arcus, cuius eſt ſecans, eſſe æqualem illi arcui.

THEOREMA V. PROPOS. V.

TAngens complementi arcus, ad quem eiuſdem ſecans minimam habet rationem,

eſt æqualis Quadranti circuli à principio lineæ ſpiralis, per punctum vbi ſecans minimæ proportionis ſpiralem ſecat, deſcripti.

Sint omnia quæ ſuperiori propoſitione. Dico tangentem BL. eſſe æqualem Quadranti KH. Quoniam triangula ADE. ABL. communem habent angulum ad A. &
32. 1. 4. 6. rectos ADE. ABL. ſunt æquiangula. Igitur vt AD. ad AM. ita DE. ad BL. Sed vt AD. ad AM. id eſt, ad AB.
1. huius. Schol. 33. 6. ita arcus CM. ad Quadrantem CB. id eſt arcus KD. ad Quadrantem KH. Igitur vt recta DE. ad BL. ita arcus KD.
4. huius. id eſt, recta DE. illi æqualis, ad quadrantem KH. æquales
9. 5. igitur ſunt BL. recta tangens arcus BM. & Quadrans KH. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

4. huius. *Hinc deducitur arcum CM. eſſe æqualẽ Quadranti KH. eſt enim arcus CM. æqualis tangenti BL. quæ modo probata eſt æqualis Quadranti KH.*

COROLLARIVM. II.

Sequitur præterea ex dictis, tam Quadrantem KH. quam arcum CM. eſſe medio loco proportionalem inter arcum DK. & Quadrantem ABC. nam vt KD. ad KH. ita oſtenſum
Pappus lib. 8. p. 22. & 15. 5. ele nent. Corol. 1. 5. huius. *eſt eſſe DA. ad AM. & vt DA. ad AM. ita Quadrans KH. ad Quadrantem BC. ergo vt arcus KD. ad quadrantem KH. ita Quadrans KH. id eſt arcus CM. ad Quadrantem BC.*

COROLLARIVM III.

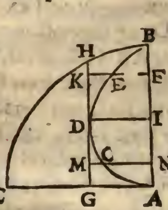
Denique patet arcum DH. eſſe minorem arcu DK. id eſt arcum MB. arcu CM. Nam arcus KD. eſt æqualis re-
Archimed. 1. de ſphæra & Cylindro. *cta tangenti DE. at tangens DE. maior eſt quam arcus DH. igitur arcus DH. eſt minor arcu DK.*

THEO-

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

SI diametro ſpiralis tam intra Quadrantem deſcriptæ, quam partialis, parallela ducatur tangens ipſam ſpiralem; & à puncto contactus ſinus ſpiricus ducatur: is erit omnium ſinuum ſpiricorum maximus.

Diametro ſpiralis AB. intra Quadrantem ABC. deſcriptæ, ducatur recta HG. parallela tangens ſpiralem in D. & ex D. ducatur DI. ſinus ſpiricus. Dico DI, eſſe omnium ſinuum ſpiricorum maximum. Ducantur enim quilibet alij ſinus FE. NO. ſupra infraue ſinum DI. ſecantes Spiralem in E. & O. & tangentem GDH. in K. M. Cum recta HDG. ex hypotheſi tangat ſpiralem in D. in illo ſolo puncto tanget. Cadet igitur tota GH. extra ſpiralem. Quare punctum K. erit extra ſpiralem: eſt autem punctum E. in linea ſpirali, maior igitur eſt FK. quam FE. totum quam pars; Quoniam autem ex deſcriptione parallelæ ſunt DK. IF. itẽ KF. & DI. parallelogrammum eſt DIFK. æquales igitur ſunt KF. DI. ſed KF. maior eſt oſtenſa quam EF. igitur DI. maior eſt quam EF. Eodemque prorſus modo oſtendetur DI. maior quam NO. & quam quilibet alius ſinus ſpiricus. Atq; eadem omnino demonſtratio ſuccedet, ſi ABD. ponatur quælibet pars ſpiralis, vt euidentiſſimum eſt. Igitur ſi diametro ſpiralis &c. Quod erat demonſtrandum.



13. p. de ſpiralibus Archimedis.

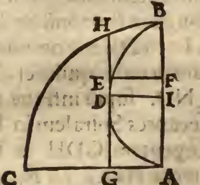
35. defin.
34. 1.

THEO-

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Recta perpendicularis ad ſinum maximum, a puncto vbi is ſpiralem Quadrantis, aut partialem ſecat, eandem ſpiralem contingit.

Sit Quadrans ABC. Spiralis Quadrantis ADB. quam ſecet DI. ſinus maximus in D. a quo ad ipſam DI. ducatur perpendicularis GDH. Dico quod recta GDH. lineam ſpiralem tangit in D. ſi enim non ita ſit, ſecet eam, ac tranſeat per puncta D. E. & ducatur EF, ipſi DI. parallela, ſecans AB. in F.



defin. 3. huius. Cum recti ſunt anguli ad I. ex definitione, & D. ex ſuppoſitione, 28. 1. parallelæ ſunt AB GH. id eſt, IF. & DE. ſed & parallelæ ſunt EF. DI. ex hypotheſi: igitur parallelogrammum eſt EFID. 35. defin. 34. 1. æqualia igitur ſunt latera EF, DI. non eſt igitur DI. maior quam EF. ac proinde non eſt omnium ſinuum ſpiricorum maximus: Quod eſt contra hypotheſin. Idem manifeſte contingit in ſpirali partiali. Igitur perpendicularis &c. Quod erat demonſtrandum.

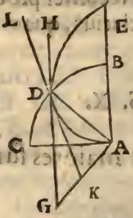
THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

Spiralem in eodem puncto duæ rectæ non contingunt.

Sit linea ſpiralis ADE. in qualibet circulatione deſcripta, & contingat ipſam recta HDG. in puncto D. iungaturque AD. ad principium ſpiralis; & centro quidem A. interuallo AD. circulus deſcribatur CDB. qui ſecet principium circulationis AC. in C. & ducatur AK. ipſi AD. perpendicularis quæ coibit cum contingente HDG. in G. (18. 19. 20. de lineas ſpiratibus Archimedis.)

Dico

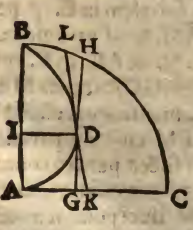
Dico non poſſe duci aliam contingentem præter HDG. quæ ſpiralem tangat in D. ſi enim poteſt, ducatur, & ſit LDK. quæ coibit cum AK. non in puncto G. alias duæ rectæ HDG. LDK. ſpatium compræhenderent, ſit in puncto K. quod, vel cadat inter G. & A. puncta, vel vltra; ita vt AK. ſit vel totum reſpectu ipſius AG. vel pars. Conſtat ex ijs quæ demonſtrauit Archimedes propoſitionib. 18. 19. 20. de lineis ſpiralibus, cum contingentes ſint vtraque HDG. LDK. tam rectam AG. quam rectam AK. eſſe æqualem arcui CD. æquales igitur ſunt AG. AK. pars & totum, Quod eſt abſurdum, Non ergo tangent rectæ HG. LK. Spiralem in eodem puncto D. Quod erat probandum. 14. pron. 1. pron.



THEOREMA IX. PROPOS. IX.

SI in puncto in quo ſinus ſpiricus omnium maximus ſpiralem Quadrantis, aut partialem ſecat, recta eandem ſpiralem tangat: ea erit dicto ſinui perpendicularis.

In puncto D. in quo Sinus ſpiricus DI. omnium maximus ſpiralem Quadrantis ADB. ſecat, recta HDG. Eandem ſpiralem tangat. Dico rectam HDG. eſſe ipſi DI. perpendicularem. Si enim res non ita habeat, ſit alia quæpiam LDK. ipſi DI. perpendicularis. Quoniam ſpiralem ADB. ſecat ſinus ſpiricus omnium maximus DI. & à puncto ſectionis D. ipſi ſinui DI. perpendicularis ponitur KDL. ea ſpi-

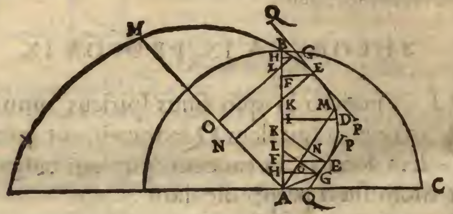


7. huius. ſpiralem tanget in D. ſed etiam ſpiralem tangit in D. recta GDH. Igitur ſpiralem in eodem puncto tangunt duæ
8. huius. rectæ HDG. LDH. Quod eſt abſurdum. Nec aliter procedit demonſtratio, in ſpirali partiali quod clarius, quam vt ſuperflua repetitione indigeat.

THEOREMA X. PROPOS. X.

Sinus ſpirici maximo propriores maiores ſunt remotioribus.

Sit Spiralis Quadrantis, aut partialis ADB. cuius ſinus ſpiralis maximus DI. & conſtituantur primo inter maximum, & principium lineæ ſpiralis A. duo ſinus EF. GH. ille vicinior maximo, hic remotior. Dico ſinum EF. eſſe



maiorem ſinu GH. Tangat recta PQ. ſpiralem in E. (per datum poſſibile) cui parallela ſit AM. & ad vtrumque perpendicularis EN. ſecans MA. in N. & AB. in K. ipſi
29. 1. vero EK. ex puncto G. ducatur parallela GOL, ſecans MA. in O. perpendiculariter, & AB in L. manifeſtum eſt AM.
4. defin. huius. eſſe dimetientem ſpiralis partialis AEM. cui cum parallela ducta ſit PEQ. tangens ſpiralem in E. & a puncto conta-
defin. 3. & 4. huius. 6. huius. ctus E. ductus ſit ſinus ſpiricus EN. is erit omnium ſinuum ſpiricorum qui in ſpirali partiali AEM. duci poſſunt maximus. Quare maior eſt quam ſinus ſpiricus GO. eiuſdem par-

partialis ſpiræ, ſed & maior eſt NK. quam OL. (Nam
cum æquiangula ſint triangula ANK. AOL. ob rectos ad 32. 1.
O. N. & communem ad A. erit vt AN. maior ad AO. mino- 4.6.& 14. 5.
rem ita NK. maior ad OL. minorem) tota igitur EK. ma-
ior eſt, quam tota GL. Rurſus cum æquiangula ſint trian-
gula KEF. LGH. (nam parallelæ ſunt EK. GL. item
EF. GK. ex hypotheſi, & anguli ad F. H. recti) erit vt 4. 6.
KE. ad EF. ita LG. ad GH. maior autem oſtenſa eſt KE.
quam LG. maior etiam eſt EF. quam GH. Quod primo 14. 5.
erat demonſtrandum.

Cadant ſecundo duo ſinus ſpirici ſupra ſinum ſpiricum maximum DI. & fiant reliqua, vt in prima parte huius propoſitionis. Eodem prorſus modo probatur AM. eſſe dimetientem. EN. omnium ſinuum ſpiricorum partis AEM. maximum; ideo maiorem quam GO. Iam vero (in quo differt prima pars à ſecunda) minor eſt KN. quam LO. (Nam cum triangula AOL. ANK. ob parallelas LO. KN. habeant angulos ad N. O. item ad K. L. item ad A. æqua-
les, ſunt æquiangula ideoque vt AO. ad OL. ita AN. ad 32. 1.
NK. & maior eſt AO. quam AN. ideoque & maior OL. 4. 6.
quam NK.) ſi igitur ex maiori EN. detrahatur minor 14. 5.
KN. & ex minori GO. maior LO. remanebit EK. maior quam GL. Hinc eodem modo, quo in prima parta probabitur EF. maior quam GH. Quod erat ſecundo loco demonſtrandum.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SEcans minimæ proportionis tranſit per punctum vbi ſinus ſpiralis Quadrantis maximus ſpiralem ſecat.

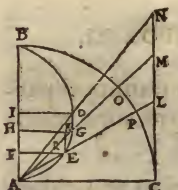
Hoc euidenter deducitur ex ſuperioribus propoſitionibus. Nam parallela tangenti Quadrantis, aut diametro 13. de linea
Spiralis quadrantis, ipſam Spiralem tangit in vno tantum ſpiralibus. Archim.

3. huius. puncto: at vero per illud punctum tranſit ſecans minimam ex cæteris ſecantibus ad ſuum arcum proportionem habens, & in eodem puncto ſinus ſpiricus omnium in Quadrante maximus ſpiralem ſecat:
6. huius. Igitur ſecans minimæ proportionis tranſit per punctum vbi ſinus ſpiricus Quadrantis maximus ſpiralem ſecat. Quod erat &c.

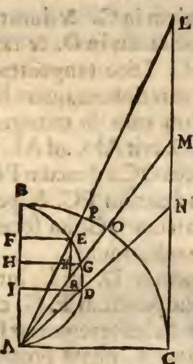
THEOREMA XII. PROPOS. XII.

SI duæ ſecantes, vtraque aut vltra aut citra ſecantem minimæ proportionis ducantur: remotior ad ſuum arcum maiorem habet rationem, quam propinquior.

In Quadrante ABC. ſit ſecans minimæ proportionis AN. occurrens tangenti CN. in N. & ducantur duæ aliæ ſecantes AM. propinquior, AL. remotior, vtraque citra ſecantẽ AN. quæ ſecent Quadrantem in punctis O. P. Dico ſecantem AL. ad ſuum arcum PC. maiorem habere rationem quam ſecantem AM. ad arcum OC. Deſcribatur intra Quadrantem Spiralis ADB. in qua ſinus ſpiricus
11. huius. omnium maximus DI. ſecans ſpiralem in D. tranſibit ſecans AN. per punctum D. Igitur ſecantes AM. AL. ſpiralem ſecabunt citra punctum D. vt in
10. huius. punctis G. E. per quæ ducantur ſinus ſpirici GH. EF. erit GH. ſinus ſpiricus maximo DI. vicinior, maior quam EF. remotior. Quare ducta EK. ad FE. perpendicularis, aut ipſi AB. ſeu CN. parallela ipſam HG. ſecabit in K. inter puncta G. & H. ideoque ipſam GA. inter puncta G. A. videlicet in R. maiorque erit AG. totum quam pars AR. Iam vero cum in triangulo



MAL.

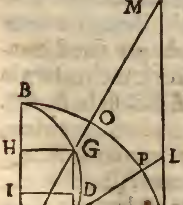


MAL. baſi ML. ducta ſit parallela ER. erit vt AL. ad AM. ita AE. ad AR. maior autem eſt ratio AE. ad AR. quam AE. ad AG. igitur maior eſt ratio AL. ad AM. quam AE. ad AG. ſed vt AE. ad AG. ita arcus CP. ad arcum CO. Igitur maior eſt ratio AL. ad AM. quam arcus CP. ad arcum CO. & permutando, maior ratio ſecantis AL. ad ſuum arcum CP. quam ſecantis AM. ad arcum CO. Quod primo demonſtrandum erat. 2. & 4. 6. 8. 5. 13. 5. 1. huius.

Idem omnino ſequitur, ſi vtraque ſecans cadat ſupra AN. vt manifeſte patet ex figura. Quare ſi duæ ſecantes &c. Quod erat oſtendendum.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

DAta ſecante, quæ non ſit minimæ proportionis, poteſt duci alia ſecans quæ eandem habeat rationem ad ſuum arcum, quam data ad ſuum.



In Quadrante ABC. ſit ſecans data AEL. occurrens tangenti CL. in L. quæ non ſit minimæ rationis, cuius arcus PC. Dico poſſe in Quadrante duci aliam ſecantem quæ eandem ad ſuum arcum rationem habeat, quam ſecans AL. ad arcum PC. Sit in Quadrante deſcripta ſpiralis ADB. in qua ſinus maximus DI. cui parallelus ducatur ſinus ſpiricus EF. & ex E. ad FE. perpendicularis, aut ipſi AB.

AB. CM. parallela EG. ſecans ſpiralem in G. & ducatur AG. recta occurrens peripheriæ Quadrantis in O. & tangenti in M. erit CM. ſecans arcus OC. Dico tangentem AM. ad ſuum arcum OC. eam habere rationem, quam habet ſecans AL. ad arcum PC. Nam cum in triangulo
2. & 4. 6. MAL. baſi ML. parallela ducta ſit EG. erit AM. ad AL. vt
3. huius. AG. ad AE. ſed vt AG. ad AE. ita arcus OC. ad arcum PC. ergo vt AM. ad AL. ita arcus OC. ad arcum PC. & permutando, vt ſecans AM. ad ſuum arcum OC. ita ſecans AL. ad arcum PC. Quod erat demonſtrandum.

Manifeſtum autem eſt quod punctum D. cadit inter puncta G. & E. alias enim ſi vtrumque punctum E. G. caderet aut citra, aut vltra punctum D. haberet remotior ſecans ad ſuum arcum maiorem rationem, quam propinquior; quod eſt abſurdum, cum oſtenſa ſit vtraque eandem habere rationem. Quod etiam inde conſtat, quia ſi-
6. huius. nus ſpiricus FE. minor eſt quam DI. ex 6. huius, quare perpendicularis EG. ſecabit ipſam DI. in K. inter puncta D. I. quare producta ſecabit ſpiralem in G. ſupra DI.

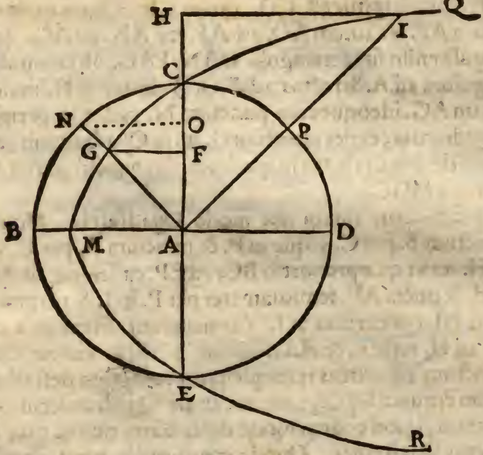
PROBLEMA I. PROPOS. XIV.

QVadratricem in Quadrante deſcribere, & extra Quadrantem producere, atque toti circulo accommodare.

Sit circulus BCDE. cuius centrum A. per quod tranſeant duæ perpendiculares BD. CE. ſecantes circulum in quatuor Quadrantes, in quorum vno ABC. ſit baſis AB. & latus erectum AC. Conuertatur AB. circa A. centrum, tanquam verticem, ita vt punctum B. perueniat in N. & eodem tempore linea recta coincidens cum AB. moueatur ex A. in F. in toto motu perpendicularis ad latus erectum AC. aut parallela baſi Quadrantis AB. ita vt quæ proportio eſt CB. ad BN. arcum quem percurrit punctum B. ea

ſit

ſit lateris erecti CA. ad partem AF. quam percurrit punctum A. & in illo motu concurrant duæ rectæ AN. & per-



pendicularis FG. in puncto G. (concurrent autem cum angulus GFA. ſit rectus & GAF. acutus) deſcribet punctum concurſus lineam curuam MGC. quam eſſe Quadratricem Dinoſtrati conſtat ex Pappo lib. 4. prop. 15. & Clauio ad vltimam propoſit. 6. element. Quod vero ea tota ſit in Quadrante, ita demonſtrabimus. Sit quodlibet punctum Quadratricis modo deſcriptæ G. a quo perpendicularis intermedia ſecet larus erectum AC. in F. & diameter Quadrantis per illud idem punctum G. ducta ſecet Quadrantis peripheriam in N. puncto, a quo ducatur ſinus rectus NO. arcus NC. Quoniam, ex deſcriptione, eſt vt peripheria Quadrantis BC. ad arcum BN. ita latus erectum AC. ad partem AE. erit per conuerſionem rationis, 13. pron.

vt

vt BC. ad CN. ita AC. ad CF. Cum vero CO. ſit ſinus
Lemm.3.huius. verſus arcus NC. maior erit ratio AC. ad CO. quam BC.
ad CN. Quare maior erit ratio AC. ad CO. quam AC. ad
5. pron. 4. 6. CF. minor igitur eſt CO. quam CF. Quare maior AO.
34. 1. quam AF. Vt autem AO. ad AF. ita AN. ad AG. (æquiangula enim ſunt triangula OAN. FAG. ob communem angulum ad A. & rectos ad F. O.) igitur AN. maior eſt quam AG. ideoque cum punctum N. cadat in peripheriã Quadrantis, cadet punctum G. intra Quadrantem; atque idem demonſtrabitur in quolibet alio puncto partis Quadrantis MGC.

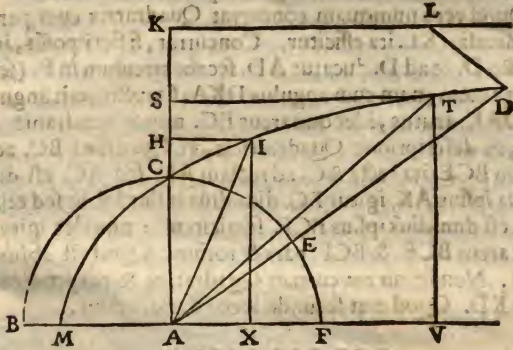
Producetur autem hoc modo Quadratrix. Moueatur punctum B. per C. vſque in P. & punctum A. per C. vſque in H. ita vt quæ proportio BC. ad BP. ea ſemper ſit AC. ad AH. & ducta AP. ſemidiameter per P. in I. & perpendicularis HI. concurrant in I. (concurrunt autem quia angulus ad H. rectus, & HAI. acutus) atque eadem ratione punctum concurſus relinquens ſui veſtigium deſcribat lineam curuam CIQ. eam vocamus Quadratricem continuatam, quod eodem modo deſcribatur quo ea quæ continetur Quadrance. Quod vero ea cadat extra circulum
19. 1. patet, ſumatur enim quodlibet punctum I. Quoniam maior eſt AI. ſubtendens angulum rectum ad H. quam AH.
defin. 15. & maior AH. quam AC. totum parte, & AC. æqualis ipſi AP. maior erit AI. quam AP. ſed punctum P. cadet in peripheriam circuli, ergo punctum I. cadet extra. Idemque oſtendetur in quolibet alio puncto Quadratricis productæ; eritque tota Quadratrix MCIQ. Quadratrix ſemicirculi BCD. Quod ſi in inferiori ſemicirculo alia deſcribatur NER. eo modo quo in ſuperiori exiſtet totius circuli Quadratrix REMCQ. Quod faciendum fuit.

THEO-

THEOREMA XIV. PROPOS. XV.

SI latus erectum Quadrantis duplicetur extra Quadrantem, & per eius extremum perpendicnlaris ducatur: ea erit Quadratrici Ἀσύμπτωτος.

Sit Quadrans ABC. cuius latus erectum AC. eiuſque duplum AK. ac per punctum K. ducta ſit perpendicularis KL. ſit etiam Quadratrix ſemicirculi MCT. Dico perpen-



dicularem HL. eſſe Quadratrici Ἀσύμπτωτον. Aſymptoton autem vocamus ſimilitudine eius quæ ducitur in Hyperbola, apud Apollonium li 2. con. prop. 1. quæ videlicet quo magis producitur, magis ad Hyperbolam accedit, nec tamen vnquam cum ea concurrit. Primum igitur quod Quadratrix quo vlterius producitur, eo propius ad rectam KL. accedat, ita demonſtratur. Producatur baſis Quadrantis BA. quantum libet in F. ac perſiciatur ſemicirculus BCF. & ex quolibet puncto I. Quadratricis in baſim productam

ductā demittatur perpēdicularis IX. & ducatur AI. itemq; perpendicularis IH. hinc producatur Quadratrix ex I. in T. etiam mouebitur punctum concurſus I. in T. & AI. promouebitur in AT. & ducta TS. ad AK. perpendiculari, aſcendet HI. in ST. vt conſtat ex deſcriptione Quadratricis. Ducatur TV. ad latus Quadrantis productum perpendicularis. Conſtat HAXI. & SAVT. eſſe parallelogramma, quorum
34. 1. aduerſa larera æqualia ſunt. Igitur æqualia ſunt SA. TV. Item HA. XI. maior autem eſt SA. quàm HA. maior igitur etiam eſt TV. quam IX. Igitur propius accedit punctum T. ad rectam KL. quam punctum I. Quod in alijs quoque oſtendentur: Id autem primo probandum erat.

Quod verò numquam concurrat Quadratrix cum perpendiculari KL. ita efficitur. Concurrat, ſi fieri poſſit, in puncto D. & ad D. ducatur AD. ſecans circulum in E. (ſe-
32. 1. cabit autem, nam cum angulus DKA. ſit rectus, erit angulus DAK. acutus, ideoque arcus EC. minor quadrante) erit, ex deſcriptione Quadratricis, vt Quadrans BC. ad arcum BCE. ita recta AC. ad rectam AK. ſed AC. eſt dimidia ipſius AK. igitur BC. dimidius ipſius BCE. ſed etiā
7. pron. BC. eſt dimidius ipſius BCF. ſemicirculi: æquales igitur ſunt arcus BCE. & BCF. pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur concurrent Quadratrix & perpendicularis KD. Quod erat ſecundo loco oſtendendum.

COROLLARIVM.

Ex duabus ſuperioribus propoſitionibus conſtat Quadratricem principio, ac fine carere. Nam ideo primum punctum non habet, quod baſis Quadrantis & prima perpendicularis in vnam lineam coincident, quæ ſectionem efficere non poſſunt; vltimo ideo caret, quod duæ, baſis Quadrantis, & vltima perpendicularis ſint parallelæ, ideoque ad concurſum vltimi puncti conuenire non poſſunt. Rurſus manifeſtum eſt verſus finem Quadratricem in infinitum produci, non verſus initium.

THEO-

THEOREMA XV. PROPOS. XVI.

QVadratrix non eſt figura rectilinea, non Circulus, non Coni ſectio.

Quod Quadratrix non ſit figura rectilinea, apertius eſt quam vt probari debeat. Sed quod neque Circulus, aut Ellipſis ita probatur. Sit enim, ſi fieri poteſt, horum alteruter; erit in figura 14. æ huius, MD. producta eius diameter; cum tam CE. quam ipſius CE. parallelas bifariam diuidat: igitur in recta MD. eſt centrum figuræ; ſit in puncto A. ſecabitur ergo bifariam diameter MD. in puncto A. æquales igitur erunt MA. & reliqua ſemidiameter verſus D. Quod eſt abſurdum, cum infinita ſit pars diametri ab A. verſus D. & finita ab A. verſus M. At non eſſe Parabolam, aut Hyperbolam ita demonſtramus. In eadem figura 14. æ huius, dicatur MCQ. eſſe Parabolam, aut Hyperbola, erit proculdubio ipſius diameter, atque axis recta MD. cum tam ipſam CE. quam eius parallelas intra figuram ductas bifariam diuidat; cui cum parallela ponatur KL. extrema perpendicularis, ea producta cum Quadratrice conueniet. Quod eſt abſurdum; eſt enim ἀσύμπτωτος. Igitur quadratrix non eſt Parabola, aut Hyperbola. Quod eſt prætetea demonſtrandum.

28. 2. Conic.
30. 1. Conic. & 15. defin. elem.
Corol. 15. huius.
28. 2. Conic.
26. 1. Conic.
15. huius.

SCHOLIVM.

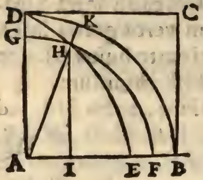
Ex iis quæ hac propoſitione demonſtrata ſunt colligi videtur, Quadratricem nullum alium habere eſſendi modum, præter eum quem illi tribuit motus puncti, in quo ſeſe diameter Quadrantis & perpendicularis ad latus erectum Quadrantis interſecant: neque vllum punctum in ea linea reperiri, quod concurſus ille non efficiat. Quare baſim Quadratricis inter ἀδύνατα recenſendam, cum dicatur eſſe pars

baſis Quadrantis inter centrum Quadrantis, & punctum Quadratricis in dicta baſi, intercepta. Nam punctum Quadratricis in baſi neque eſt, cum ibi ſeſe baſis Quadrantis, & prima perpendicularis non ſecent, ſed concurrant; neque eſſe poteſt, cum alio modo quam motu interſectionis lineæ Quadratrix non procreetur. Quomodo ergo veteres, referente Pappo Collectionum lib. 4. p. 16. & ab illo, Clauio in comment. in 6. elementorum prop. 4. de Quadratrice, demonſtrant baſim Quadratricis, quæ reuera nec eſt, nec eſſe poteſt, eſſe tertio loco proportionalem ad peripheriam Quadrantis, & eius diametrum? Vereor admodum ne illud Theorema aliter proponendum ſit, hoc nempe modo, in quo nihil erit quod reprahendi poſſit.

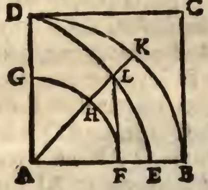
THEOREMA XVI. PROPOS. XVII.

SI ex centro Quadrantis, in quo deſcripta eſt Quadratrix, alius Quadrans deſcribatur intra Quadrantem, qui aut ipſe, aut eius tangens Quadratricem ſecet: non erit eius baſis arcui Quadrantis, eiuſque ſemidiametro tertio loco proportionalis: ſi vero neque ipſe, neque eius tangens Quadratricem ſecet, erit eius baſis arcui Quadrantis, & ſemidiametro tertio loco proportionalis.

Sit Quadrans ABD. cuius cenrrum A. baſis AB. latus erectum AD. Quadratrix DF. centro A. alius Quadrans AGF. deſcribatur, cuius baſis AF. qui Quadrantem ABD. aut ſecet ſua peripheria in H. aut ſua tangente FL. in L. Dico non eſſe vt DB. ad DA. ita DA. ad AF. Ducatur enim in prima figura perpendicularis HI. in ſecunda tangens FL. ſi dicatur eſſe vt DB. ad DA. ita DA. ad AF. ſequetur in



prima ſubtenſam HI. eſſe æqualem arcui HF. in ſecunda tangentem FL. eſſe æqualem arcui HF. quorum vtrumque eſt abſurdum; Quod quidem quia tum à Pappo lib. 4. prop. 16. tum à Clauio fuſius prop. 4. de Quadratrice demonſtratur, eo lectorem remittimus.



Secundam partem propoſitionis ita probamus nos ex prima. Sit Quadrans ADB. cuius centrum A. baſis AB. latus erectum AD. Quadratrix DE. & Quadrans AGE. cuius baſi AE. qui neque ipſe neque eius tangens EL. ſecet Quadratricem. Manifeſtum eſt eum ita ſe habere, ad ipſam Quadratricem, vt ipſe totus intra Quadratricem, eius vero tangens tota extra Quadratricem cadat: alias enim aut ipſe, aut eius tangens arcum BD. ſecaret, ideoque ex prima parte huius, non eſſet tertio loco proportionalis. Dico eſſe vt DB. ad AD. ita AD. ad AE. Si enim non ſit eadem ratio DB. ad AD. quæ AD. ſcilicet AB. ad AE. erit vel maior vel minor: ſit primo maior; fiatque eadem, ac ſit vt DB. ad DA. ita AB. ad AI. erit AI. minor quam AE. (nam cum ſit vt DB. ad DA. id eſt ad AB. ita AB. ad AI. & maior ſit ratio DB. ad DA. quam AB. ad AE. ex hypotheſi, maior erit ratio AB. ad AI. quam AB. ad AE. ideoque minor eſt AI. quam AE.) ergo deſcriptus Quadrans AMI. cadit intra Quadrantem AGE. ſed Quadrans AGE. cadit intra Quadratricem DE. igitur



& Quadrans AMI. eiuſque tangens IM. cadit intra Quadratricem, ſecatque ſuum quadrantem verbi gratia in O. & Quadratricem in N. ergo ex priori parte huius AI. non eſt tertio loco proportionalis. Quod eſt abſurdum.

Sed ratio DB. ad DA. ponatur minor, quam DA. ad AE. fiantque eadem. ac ſit vt DB. ad DA. id eſt, ad AB. ita AB. ad AP. erit AP. maior quam AE. (nam cum ſit vt DB. ad AB. ita AB. ad AP. minor autem ſit ratio DB. ad AB. quam AB. ad AE. minor etiam erit ratio AB. ad AP. quam AB. ad AE. ideoque maior eſt AP. quam AE.) ergo deſcripti Quadrantis AQP. baſis AP. cadet vltra punctum E. & vltra tangentem EL. ſecabit igitur arcus QP. tangentem EL. verbi gratia in R. ideoque cum tangens EL. cadat extra Quadratricem, etiam punctum R. cadet extra Quadratricem, ac proinde Quadrans AQP. ſecabit Quadratricem in S. Non igitur baſis AP. eſt tertio loco proportionalis arcui DB. & ſemidiametro AD. ex prima parte huius. Erit igitur baſis AE. Quod erat &c.

SCHOLIVM.

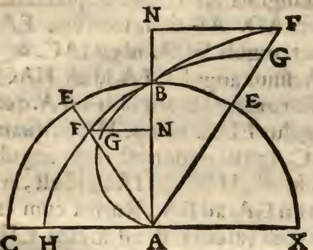
Ex dictis manifeſtum eſt Quadratricem non ſua baſi, quæ vere neque extat, neque extare poteſt, ad circuli tetragoniſmum conducere, ſed ſuamet eſſentia; ad quam ſi habitudinem habeat Quadrans interior qualem modo diximus, ita vt eam neque ſua peripheria, neque ſua tangente ſecet, erit dicti Quadrantis baſis arcui primarij Quadrantis, & ſemidiametro tertio loco proportionalis. Veteres tamen cum baſim Quadratricis, motu, qui ad eam peruenire non poteſt, definierunt; reſpexiſſe videntur ad punctum quoddam in baſi Quadrantis, ad quod linea motu progenita, ſeu potius punctum interſectionis motum continuo magi accedit, ac tandem propius quam ad aliud vllum punctum, quod in baſi deſignari poſſit; ita vt ſi vel minimam molem haberent illa, tandem ſeſe contingerent. Quo pacto, & nos tum in hac

hac linea, tum in alijs Quadratricibus, quas in demonſtrationes adducemus, BASIS notionem aſſumemus.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVIII.

QVadratrix ſpiralem tangit in puncto, vbi vtraque Quadrantem ſecat.

In ſemicirculo CBX. cuius centrum A. ſint deſcriptæ ſpiralis ABG. & Quadratrix HBF. ſecantes ſemicirculum dictum in puncto B. a quo erectum eſt latus Quadrantis AB. vt patet ex earum deſcriptione. Dico quod quadratrix HBF. ſpiralem ABG. contingit in puncto B. Ducatur, AE. ſecans ſpiralem in G. & Quadratricem in F. Quadrantem in E. & FN. ſecet BA. perpendiculariter: Erit, ex deſcriptione ſpiralis, vt BA. id eſt, EA. ad AG. ita arcus Quadrantis BC. ad arcum EC. & vt BA. ad NA. ita idem Quadrantis arcus BC. ad arcum EC. ex deſcriptione Quadratricis; ergo vt BA. ad AG. ita BA. ad AN. æquales igitnr ſunt AG. AN. At vero in triangulo 9. 5.
rectangulo FNA. baſis FA. maior eſt quam latus NA. ergo FA. maior eſt quam GA. ideoque punctum F. cadit ſura punctum G. Idemque in quolibet alio puncto Quadratricis demonſtrabitur: Tota igitur Quadratrix cadit extra ſpiralem, ac cum ea in ſolo puncto B. concurrit. Quod erat demonſtrandum. 19. 1.



THEO-

THEOREMA XVIII. PROPOS. XIX.

RAdius Quadratricis in Quadrante vicinior baſi, remotiore minor eſt.

In Quadrante ABC, cuius baſis AC. latus erectum AB. centrum A. ſit Quadratrix BK. cuius baſis AK. radij AD. AF. ille vicinior, hic remotior a baſi AK. ac ſecantes Quadrantis arcum ille in I. hic in H. Dico radium AD. minorem eſſe radio AF. Si enim non ſit minor, erit vel æqualis, vel miuor. Sit primum æqualis: ac ductis FG. DE. ad AB. perpendicularibus in triangulis rectangulis AED. AGF. ponantur baſes AD. AF. ſinus toti, erit EA. ſinus anguli EDA. id eſt IAC. &



19. 1. GA. ſinus anguli GFA. id eſt HAC. maior autem eſt angulus GFA. quã angulus EDA. nempe HAC. quam IAC. igitur maior eſt ratio anguli
Corol. 1. 28. GFA. ad angulum EDA. id eſt; HAC. ad IAC. id eſt, ar-
1. huius. 33. 6. cus HC. ad arcum IC. quam GA. ad EA. Rurſus cum ex
14. huius. deſcriptione Quadratricis ſit vt arcus CB. ad arcum CH. ita BA. ad AG. erit conuertendo, vt arcus CH. ad arcum CB. ita AG. ad AB. ſed ex eadem deſcriptione, eſt vt arcus CB. ad arcum CI. ita AB. ad AE. ergo ex æquali, erit vt arcus HC. ad arcum IC. ita recta GA. ad rectam EA. Quod eſt abſurdum; oſtenſa eſt enim ratio maior HC. ad IC. quam GA. ad EA. Sed AD. dicatur eſſe maior quam AF. abſcindatur AR. æqualis ipſi AF. & ducatur RL. ad AB. perpendicularis, cadet punctum L. ſub punctum E. maiorque erit EA. quam LA. Rurſus autem, vt priori parte huius, oſtendemus minorem eſſe rationem GA. ad LA. quam
8. 5. HC. ad IC. ſed adhuc minor eſt ratio GA. ad EA. quam GA. ad LA. igitur minor eſt ratio GA. ad EA. quam HC. ad IC. eſt autem, & eadem ratio GA. ad AE. quæ

arcus

arcus HC.ad arcum IC. vt prima parte huius probatum eſt. Quod eſt abſurdum, non igitur AD. maior eſt quam AF. ſed nec æqualis, igitur minor. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc colligitur baſim Quadratricis eſſe omnium radiorum minimum; & reliquorum minores qui baſi viciniores.

COROLLARIVM. II.

Rurſus conſtat differentias radiorum Quadratricis, & & Quadrantis eo maiores eſſe, quo baſi viciniores: vt DI. eſſe maiorem ipſa FH. inaquales enim AD. AF. illa minor, hac maior ex æqualibus AI. AH. relinquunt inaquales DI. FH. illam maiorem hanc minorem. 15. defin. 5. pron.

THEOREMA XIX. PROPOS. XX.

Sinus Quadratricis in Quadrante baſi vicinior, remotiore maior eſt.

Sint eadem quæ ſuperiori propoſitione. Dico ſinum Quadratricis ED. qui vicinior eſt baſi AIC. eſſe maiorem ſinu GF. qui remotior eſt. Si enim non ſit maior, ſit æqualis, aut minor: ac ſit primum æqualis; ponanturque ſinus toti rectæ GF. ED. erit GA. tangens anguli GFA. id eſt, 29. 1. HAC. & EA. tangens anguli EDA. id eſt, IAC. & maior eſt angulus GFA. angulo EDA. id eſt HAC. ipſo IAC. Igitur maior eſt ratio tangentis GA. ad tangentem EA. 26. primi quam anguli GFA. ad angulum EDA. id eſt, quam angu- huius. li HAC. ad angulum IAC. id eſt, quam arcus HC. ad arcum IC. Sed etiam ex deſcriptione Quadratricis, & ex

pro-

progreſſu ſuperioris propoſitionis, eſt vt GA. ad EA. ita HC. ad IC. Quod eſt abſurdum; probatum enim eſt eſſe maiorem rationem GA. ad EA. quam HC. ad IC. Sed dicatur eſſe minor ED qnam GF. erit ipſius tangens minor,
8. 5. quam cum ponitur æqualis ipſi GF. Igitur tunc multo maior erit ratio GA. ad EA. quam anguli GFA. ad angulum EDA. id eſt, quam HAC. ad IAC. id eſt, quam arcus HC. ad arcum IC. Quod eſt abſuɹdum; cum ex progreſſu prioris propoſitionis, & prima parte huius, conſtet eſſe vt GA. ad EA. ita HC. ad IC. Non ergo ED. ipſi GF. æqualis eſt, aut minor; igitur maior. Quod erat probandum.

COROLLARIVM.

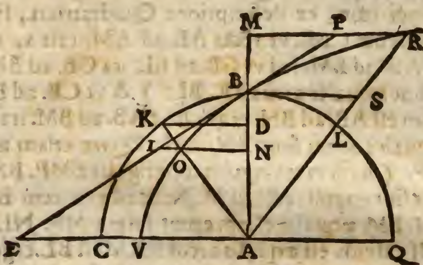
Hinc conſtat baſim Quadratricis eſſe omnium ſinuum ipſius Quadratricis maximum; reliquorum eos eſſe maiores, qui illi propinquiores fuerint.

THEOREMA XX. PROPOS. XXI.

Si recta ex puncto vbi Quadratrix Quadrantem ſecat ducta auferat ex baſi Quadrantis producta rectam æqualem arcui Quadrantis; ea in dicto puncto tanget Quadratricem.

Sit Quadrans ABC. cuius baſis AC. latus erectum AB. in quo Quadratrix VB. ſecans arcum Quadrantis in B. puncto: a quo ducta BE. auferat ex baſi AC. producta rectam AE. æqualem arcui Quadrantis CB. Dico quod recta EB. producta tangit Quadratricem in puncto B. ſumantur duo quibet arcus æquales BK. BL. vltra citraque punctum B. per quos ducantur ſemidiametri AK. AL. ſecantes Quadratricem; illa in O. iſta producta in R. a quibus punctis ducantur ON. RM. perpendiculares ad AB. productam,

ductam,ſeu parallelæ ad AC. ſecantes lineam BE. illa in I. iſta in R. item ſinus KD. arcus KB. & BS. tangens arcus



BL. Quoniam O. eſt punctum in Quadratrice, erit ex deſcriptione Quadratricis, vt arcus Quadrantis BC. ad arcum KC. ita BA. latus erectum ad AN. rectam, & per conuerſionem rationis vt CB. ad BK. ita AB. ad BN. & cum in triangulis ABE. NBI. rectangulis ad N. & A. etiam communis ſit angulus ad B. vt ideo æquiangula ſint, erit vt BA. ad BN. ita AE. ad NI. ergo vt BC. ad BK. ita AE. ad NI. & permutando vt arcus BC. ad rectam AE. ita arcus BK. ad rectam NI. æquales autem ponuntur BC. & AE. æquales igitur erunt NI. & BK. Rurſus cum DB. ſit ſinus verſus arcus KB. maior erit ratio AB. ad BD. quam arcus CB. ad arcum BK. & vt arcus CB. ad arcum BK. ita AB. ad NB. ex deſcriptione Quadratricis, igitur maior eſt ratio AB. ad BD. quam AB. ad BN. minor igitur eſt BD. quam BN. quibus ablatis ex AB. maior eſt AD. quam AN. Igitur cum in triangulis æquiangulis ANO. ADK. (ob rectos ad N. D. & communem ad A.) ſit vt AD. ad DK. ita AN. ad NO. maior autem ſit AD. quam AN. maior erit KD. quam NO. cum ergo recta IN. oſtenſa ſit æqualis arcui KB. arcus autem KB. maior ſit ſinu recto KD. & ſinus KD. oſtenſus ſit maior quam NO. erit NI. maior quam

32. 1.
4. 6.
Lemm. 3. huius.
14. huius.
5. pron.
14. 5.

NO. Cum ergo punctum O. ſit in Quadratrice, erit punctum I. extra Quadratricem; atque idem oſtendetur in quolibet alio puncto Quadratricis intra Quadrantem.

24. huius. Inſuper cum, ex deſcriptione Quadratricis, ſit arcus CB. ad arcum CBL. vt recta AB. ad AM. erit vt CB. ad BL. ita AB. ad BM. ſed vt CB. ad BL. ita CB. ad BK. (nam poſiti ſunt æquales arcus BK. BL.) & vt CB. ad BK. ita oſtenſum eſt AB. ad BN. ergo eſt vt AB. ad BM. ita AB. ad BN. æquales igitur ſunt BN. BM. Quare etiam æquales NI. MP. (nam in triangulis rectangulis BMP. BNI. cum æquales ſint anguli recti ad M. N. & ad verticem B. & latera BN. BM. æqualia etiam erunt latera MP. NI.) ſed recta NI. oſtenſa eſt æqualis arcui KB. id eſt BL. ergo etiam MP. eſt æqualis arcui BL. qui minor eſt ſua tangente BS. & tangens BS. minor quam MR. (vt enim AB. minor ad AM. maiorem, ita BS. minor ad MR. maiorem, in triangulis æquiangulis ABS. AMR. ob angulos rectos ad B. M. & communem ad A.) Quare etiam MP. minor eſt quam MR. caditque punctum P. inter M. & R. cumque R. ſit in Quadratrice, erit punctum R. extra Quadratricem; atque idem oſtendetur in quolibet alio puncto Quadratricis extra circulum: Igitur recta EBP. tota cadet extra Quadratricem, prærerque in puncto B. illam igitur continget. Quod erat probandum.

9. 5.

26. 1. Archimed. Sphera & Cylindro.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXII.

SI lineam Quadratricem recta contingat in puncto vbi circulum ſecat; anguli quos cum latere erecto Quadrantis facit linea contingens, inæquales ſunt; & is quidem qui ad præcedentia conſtituitur eſt obtuſus, qui ad ſequentia acutus.

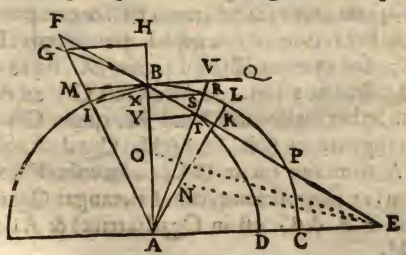
Sint

Sint omnia quæ ſuperiori propoſitione, & recta EB. producta tangat Quadratricem in B. Dico angulum ABP. eſſe obtuſum, atque ideo ABE. acutum. Nam vt MA. ad AB. ita RA. ad AS. maior autem eſt MA. quam AB. igitur maior RA. quam AS. Cadit igitur punctum S. infra R. intra Quadratricem, cum punctum R. ſit in Quadratrice: ſed adhuc punctum P. lineæ contingentis tranſit ſupra punctum R. cum ſit extra Quadratricem, ergo multo magis punctum P. eſt ſupra punctum S. maior igitur eſt angulus ABP. angulo ABS. at ABS. rectus eſt, igitur ABP. obtuſus eſt, *11. defin.* ideoque ABE. acutus. Quod erat demonſtrandum. *13. 1.*

THEOREMA XXII. PROPOS. XXIII.

SI Quadratricem recta linea contingat in puncto vbi circulum ſecat; ea coibit cum baſi Quadrantis cui inſcribitur: & pars dictæ baſis inter centrum circuli, & contingentem erit æqualis arcui Quadrantis.

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. baſis AE. latus erectum AB. in quo Quadratrix deſcripta DBG. cuius baſis AD. quæ quidem extra Quadrantem producatur, eo



modo quo decima quarta propoſitione huius demonſtratum eſt, ita vt pars DB. intra pars BG. cadat extra Quadrantem, eumque ſecet in B. puncto in quo

Quadratricem tangat recta FBE. Dico quod recta FBE. coibit cum baſi AC. producta verbi gratia in E. & quod recta AE. erit æqualis arcui Quadrantis BC. Primum euidens eſt, angulus enim BAE. rectus eſt ex ſuppoſitio-
11. huius. ne, & ABE. acutus ex demonſtratis, coeunt igitur AE.
13. pron. & BE. Quoad ſecundum, ſi AE. non eſt æqualis arcui
4. prop. de Spir. Archim. BC. erit vel maior vel minor ſit. Primum maior, & ſumatur EN. minor quidem quam AE. maior vero quam peripheria BC. & arcus BP. diuidatur bifariam in L. du-
30. 3. 28. 3. ctaque AL. ſecet tangentem in K. ideoque eius partem BP.
3. 3. 8. 6. bifariam, quapropter & ad angulos rectos. Erit igitur vt BA. ad AE. ita BK. ad KA. ſed BA. ad NE. minorem, ma-
8. 5. iorem habet rationem, quam BA. ad AE. maiorem. Igitur BA. ad NE. maiorem habet rationem quam BK. ad KA. Cum igitur circulus ſit BC. & in eo recta BP. minor dia-
7. p. de Spiralib. Archim. metro, poterit duci recta AF. ad productam contingentem BF. ita vt pars eius FI. inter circumferentiam, & productam contingentem, ad lineam IB. iungentem terminos B. I. habeat proportionem, quam BA. ad NE. Cum igitur ſit FI. ad IB. vt BA. ad NE. erit permutando vt FI. ad AB.
8. 5. id eſt AI. ita IB. ad NE. ſed recta IB. ad NE. minorem habet rationem quam arcus IB. ad arcum BC. (eſt enim VB. arcus maior quam ſubtenſa IB. & arcus BC. ex ſuppoſitione minor quam EN.) ergo FI. ad AI. minorem habet rationem, quam arcus IB. ad arcum BC. & componendo minorem habet rationem FA. ad AI. quam arcus IBC.
14. huius. ad arcum BC. ſed vt arcus IBC. ad arcum BC. ita ex deſcriptione Quadratricis HA. ad AB. id eſt GA. ad AM. ergo minorem habet rationem FA. ad AI. quam GA. ad (ducta BM. tangente ex B. in M.) AM. Quod eſt abſurdum, cum FA. ſit maior quam GA. (cadit enim F. extra Quadratricem, ex ſuppoſitione, cum FE. tangat Quadratricem tantum in B. & G. eſt in Quadratrice) & AI. minor quam AM.

BC.

Sed ſit ſi fieri poteſt AE. minor quam circumferentia BC. & ſumatur recta EO. maior quidem quam EA. minor vero quam arcus BC. & a puncto B. ducatur BQ. æquidiſtans ipſi AE. Rurſus quia in circulo BC. ſumpta eſt BP. diametro minor, tangatque BQ. circulum in B. & minor ſit ratio BA. ad EO. quam BK. ad KA. (eſt enim vt BA. ad AE. ita BK. ad KA. & BA. ad AE. minorem quantitatem maior eſt ratio, quam BA. ad EO. quæ maior poſita eſt) poteſt igitur à centro A. duci quæpiam recta AV. ad BQ. tangentem circuli, ita vt SR. inter circulum BC. & ductam FBE. intercepta ad lineam BV. partem contingentis, inter ductam & contactum, habeat eandem rationem quam BA. ad EO. Secet autem eadem ducta Quadratricem in T. tangentem Quadratricis in S. & circulum in R. tangentem circuli in V. Quoniam igitur eſt vt SR. ad BV. ita BA. ad EO. erit permutando vt SR. ad AB. id eſt ad AR. ita BV. ad EO. ſed BV. ad EO. maior eſt proportio quam arcus BR. ad arcum BC. (nam tangens BV. eſt maior arcu BR. & EO. minor arcu BC. ex hypotheſi) igitur maior erit ratio SR. ad AR. quam BR. ad BC. ſed eſt, ex deſcriptione Quadratricis, vt BR. ad BC. ita BY. (ducta TY. perpendiculari ad AB. ex T. puncto Quadratricis) ad BA. Igitur maior eſt ratio SR. ad AR. quam BY. ad AB. ſed BY. ad AB. maior eſt ratio quam XY. ad XA. (ducto ſinu RX. arcus BR.) id eſt quam RT. ad RA. igitur maior eſt ratio SR. ad RA. quam RT. ad RA. maior ergo eſt SR. quam RT. Quod eſt abſurdum cum ſit minor. Nam S. eſt in linea tangente, quæ vicinior peripheriæ exiſtit, quam Quadrarricis punctum T. Cum igitur AE. neque maior, neque minor ſit quam arcus BC. æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

4. prop. de Spiral. Archimedis.

8. 6.

8. 5.

8. prop. Spiral. Archimedis.

14. huius.

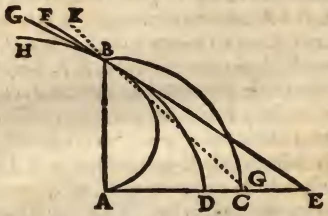
10. 5.

THEO-

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIV.

PRopoſitum ſit idem aliter demonſtrare.

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. baſis AC. latus erectum AB. in quo Quadratrix eũ ſecet in B. puncto in quo eandem Quadratricem tangat recta FBE. Dico quod recta FBE ſecans AE. baſim Quadratricis in E. abſcindit rectam AE. æqualem arcui Quadrantis BC. Inſcribatur



eidem Quadranti ſpiralis ABH. quæ, vt patet ex deſcri-
18. huius. ptione, tranſibit per B. in quo puncto Quadratrix ſpiralem contingit. Cum igitur, ex hypotheſi recta FBE. Quadratricem contingat in B. tota, puncto B. excepto, cadet extra Quadratricem; & quia Quadratrix ſpiralem tangit in B. tota extra eam cadit, ac ſolo puncto B. concurrit: Igitur etiam recta FE. tota extra ſpiralem cadit, nec niſi puncto B. cum ea congruit: tangit igitur FE. ſpiralem in B. Ma-
20. Spiral. Archimedis. nifeſtum igitur eſt ex 20. propoſitione ſpiralium Archimedis, quod recta AE. arcui BC. æqualis exiſtit. Quod erat.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXV.

EIuſdem propoſitionis alia demonſtratio.

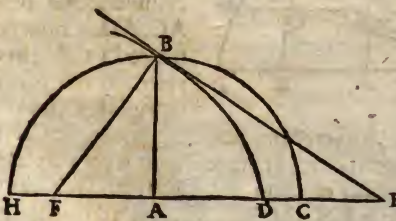
Sit rurſus Quadrans ABC. cuius centrum A. baſis AC. latus erectum AB. in quo Quadratrix DBG. eum ſecet in B. puncto, in quo eandem Quadratricem tangat. Dico quod recta FBE. ſecans AE. baſim Quadratricis productam

ctam in E. abſcindit rectam AE. æqualem arcui Quadrantis BC. Si enim AE. non ſit æqualis arcui Quadrantis, ſit eidem æqualis AG. & ducatur GBK. item ſpirales ABH. patet ex 21. huius quod KBG. tangit Quadratricem in B. ſed & ponitur FBE. tangere eandem Quadratricem in B. duæ igitur KBG. FBE. Quadratricem tangunt, igitur vtraque extra Quadratricem cadit, ac in ſolo puncto B. conuenit; ſed & Quadratrix ſpiralem tangit in B. igitur tota, puncto B. excepto, extra eam cadit, ergo vtraque recta FBE. KBG. extra ſpiralem cadit, ſolo puncto B. conuenit, ideoque illam contingit in B. Quod eſt abſurdum, non enim duæ rectæ ſpiralem in eodem puncto contingunt. Ergo recta AE. eſt æqualis arcui Quadrantis BC. Quod erat demonſtrandum. 21. huius. 8. huius.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXVI.

SI perpendicularis ad tangentem Quadratricis ex puncto contactus ducta baſim Quadrantis productam ſecet: erit pars dictæ baſis inter centrum Quadrantis, & ductam, æqualis baſi Quadratricis.

Sit circulus HBC. cuius centrum A. diamter HC. latus erectum AB. diuidens arcum HBC. in duos Quadrantes *HB. BC.* ac illius quidem baſis ſit HA. iſtius autem itidem baſis



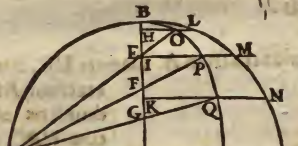
Quadrantis AC. Quadratrix GBD. cuius baſis AD. ſecans

ſecans circulum in B. Tangens Quadratricis in puncto B. ſit BE. ſecans baſim AC. productam in E. & ex *B.* ad *B*E. ducatur perpendicularis *B*E. ſecans baſim AC. productam
13. Pronun. in F. (ſecabit autem cum angulus *B*EF. ſit acutus,& F*B*E. rectus.) Dico rectam AF. eſſe æqualem AD. baſi Quadratricis. Conſtat enim ex Pappo lib. 4. p. 16. & Clauio p. 4. de Quadratrice, baſim Quadratricis eſſe tertio loco proportionalem arcui Quadrantis, & ipſius ſemidiametro nimium vt *B*C. ad *B*A. ita *B*A. ad AD. Cum autem rectangulum ad *B*. ſit triangulum F*B*E. & in baſim FE. demiſſa per-
8. 6. pendicularis *B*A. erit vt EA. ad A*B*. ita A*B*. ad AF. at vero
23. 24. 25. huius. EA. eſt æqualis arcui Quadrantis, vt igitur *B*C. ad *B*A. ita
11. 5. *B*A. ad AF. ergo vt *B*A. ad AD. ita *B*A. ad AF. quare æqua-
9. 5. les ſunt AD. AF. Quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA II. PROPOS. XXVII.

QVadratricem differentialem delineare.

Sit ſemicirculus C*B*D. cuius centrum A. diameter CD. perpendicularis A*B*. quæ eum diuidat in duos Quadrantes, quorum latus erectũ commune A*B*. baſes AC. AD. Conuertatur recta CA. circa verticem ſint punctũ immobile C. ita vt in



toto motu ſecet latus erectum A*B*. aſcendendo per G. F. E. *B*. moueatur item AD. ita vt in toto motu ſecet perpendiculariter idem latus erectum A*B*. & arcum Quadrantis D*B*. aſcendendo in KN. IM. HL. &c. Ita autem fiat geminus ille motus, vt quæ ratio lateris erecti *B*A. ad partem

tem abſciſſam GA. a recta CG. eadem ſit arcus Quadratis BD. ad arcum ſectum DN. Item in illis motibus productæ CG. CF. CE. occurrant perpendicularibus, ſeu ſinibus (qui arcus proportionales abſcindunt ex arcu Quadrantis) in punctis Q. P. O. punctum concurſus deſcribet veſtigio ſuo lineam curuam RQPOB. extra Quadrantem ABC. Et quidem quod concurrant lineæ CQ. KN. patet, quia cum angulus CAG. ſit rectus, erit CGA. acutus, ideoque & æqualis ad verticem KGQ. acutus erit, eſt autem GKQ. rectus, concurrent igitur KQ. GQ. Quod vero concurrant vltra Quadrantem ABC. ita probatur. Quoniam peripheria Quadrantis BD. & latus erectum AB. ſimiliter diuiduntur, perpendicularis NK. auferet ex latere recto rectam KB. minorem ipſa GB. punctum igitur G. cadet ſub punctum K. ideoque recta CG. producta occurret ipſi NK. vltra AB. in puncto Q. Hanc autem lineam Quadratricem Differentialem vocamus, eo quod eius baſis, vt poſtea oſtendemus, ſit differentia arcus Quadrantis, & eius ſemidiametri.

13. 1.

13. pron.

Lemm. 4. huius.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVIII.

SInus Quadratricis differentialis baſi vicinior remotiore maior eſt.

In figura ſuperiori, Quadratricis BPR. ſint ſinus KQ. IP. ille baſi vicinior, hic remotior. Dico KQ. eſſe maiorem quam IP. Quoniam, ex deſcriptione, eſt vt arcus BD. ad arcum MD. ita BA. ad AF. erit conuertendo vt arcus MD. ad arcum BD. ita AF. ad AB. ſed vt BD. arcus ad arcum DN. ita, ex deſcriptione, BA. ad AG. ergo ex æqualitate eſt vt arcus MD. ad arcum ND. ita AF. ad AG. ſed maior eſt ratio MD. ad ND. quam IA. ad KA. (ſunt enim IA. KA. ſinus recti arcuum MD. ND.) Igitur maior eſt ratio AF. ad AG. quam IA. ad KA. & permutando,

27. huius.

Corol. 1. 18. 1. huius.

conuertendo, ac diuidendo minor ratio IF. ad FA. quam
4. 6. KG. ad GA. Vt autem IF. ad FA. ita IP. ad CA. (æqui-
32. 1. angula enim ſunt triangula CAF. PIF. ob rectos ad A. I.
15. 1. & æquales ad verticem F.) & vt KG. ad GA. ita KQ. ad CA. (æquiangula enim ſunt, ob eandem cauſam, triangula CAG. QKG.) ergo minor eſt ratio IP. ad CA. quam
10. 5. KQ. ad CA. minor igitur eſt IP. quam KQ. Quod erat demonſtrandum.

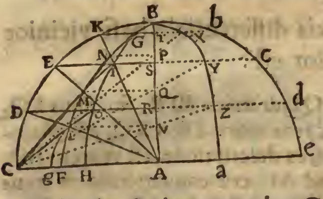
COROLLARIVM.

Hinc apparet baſim Quadratricis differentialis eſſe omnium ipſius ſinuum, maximum: reliquorum maiores qui ei propinquiores fuerint.

PROBLEMA III. PROPOS. XXIX.

Quadratricem Arithmeticam deſcribere.

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. latus erectum AB. baſis AC. in quo Quadratrix prima ſeu Geometrica BNF. Iam vero propoſita linea motu triū rectarum perficietur. Primo circa centrum A. tanquam cardinē moueatur ſemidiameter AC. ita vt continuo Quadratricem ſecet in varijs punctis



L. M. N. &c. & eius extremitas C. Quadrantem CB. percurtat, per puncta D. E. K. B. &c. per quæ ductæ perpendiculares ad AB. nempe DR. ES. KT. quæ ſunt ſinus complementorum arcuum DC. EC. KC. etiam continuo cum dictis punctis moueantur; denique recta CA. circa verticem C. punctum, in quo baſis & arcus Quadrantis coeunt,

mo-

moueatur ſurſum ſimul cum punctis, in quibus ſemidiameter AC. AD. AE. Quadratricem primariam ſecat, & occurrat perpendicularibus, ſeu ſinibus in punctis O.I.G. deſcribet punctum illud concurſus lineam curuam HGB. quam Quadratricem differentialem libet nuncupare, eo quod eius baſis, vt poſtea oſtendemus, arcui Quadrantis, & eius ſemidiametro ſit tertio loco Arithmetice proportionalis.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXX.

Differentiæ ſinuum Quadrantis, & Quadratricis Arithmeticæ ſunt æquales ſinibus Quadratricis differentialis.

Sit in ſuperiori ſchemate ſemicirculus C*B*Q. cuius centrum A. quem diuidat latus A*B*. erectum ſuper baſim CQ. in duos Quadrantes A*B*C. A*B*Q. ac in primo ſint duæ Quadratrices, altera Geometrica *B*F. altera Arithmetica *B*H. Ducatur ſemidiameter AD. ſecans Quadratricem primam in L. & circulum in D. hinc perpendicularis DRd. ſecans 29. huius.
latus A*B*. in R. & alterum Quadrantem in d. cui occurrat CL. recta in O. erit O. punctum Quadratricis Arithmeticæ. Rurſum ex L. ducatur ad A*B*. perpendicularis LV. erit vt *B*A. ad AV. ita arcus *B*C. ad arcum CD. ſeu arcus 14. huius.
*B*Q. ad arcum dc. Quare ſi connectatur CV. & producatur dum ſecet Dd. in Z. erit Z. punctum Quadratricis differentialis, atque ideo erit DR. ſinus arcus D*B*. in Quadrante 27. huius.
C*B*. & OR. ſinus in Quadratrice Arithmetica *B*H. recta vero OD. differentia ſinuum DR. OR. denique RZ. erit ſinus in Quadratrice differentiali *B*XYZ. deſcripta per puncta aZYX. modo 27. hujus explicato. Dico RZ. rectam, eſſe 27. huius.
rectæ DO. æqualem Quoniam parallelæ ſunt DO. CA. e- 29. 1.
runt in triangulis DLO. ALC. anguli D. O. angulis A.C. & anguli ad verticem L. æquales, æquiangula igitur ſunt

4. 6. dicta triangula, quare vt CA. ad OD. ita AL. ad DL. ſed
2. 6. vt AL. ad DL. ita in triangulo ADR. (in quo poſitæ ſunt
4. 6. DR. LV. parallelæ) AV. ad VR. & vt AV. ad VR. ita CA. ad RZ. (æquiangula enim ſunt rriangula CAV. ZRV. ob eandem rationem, qua diximus eſſe æquiangula
11. 5. CLA. OLD.) ergo vt CA. ad OD. ita CA. ad RZ. æqua-
9. 5. les igitur ſunt OD. RZ. Eodemque modo oſtendemus SY. eſſe æqualem ipſi EZ. atque ita in reliquis. Quod fuit probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc euidenter deducitur differentias ſinuum Quadrantis, & Quadratricis differentialis eſſe æquales ſinibus Quadratricis Arithmeticæ; nimirum rectam Zd. differentiam ſinus Rd. in Quadrante, & ſinus RZ. in Quadratrice differentiali, eſſe æqualem ſinui RO. Quadratricis Arithmeticæ BH. æquales enim ſunt DR. Rd. igitur ablatis RZ. & DO. quæ modo oſtenſæ ſunt æquales, ſuperſunt ZD. OR. inter ſe æquales.

COROLLARIVM. II.

Ex dictis etiam colligitur ratio qua altera poſteriorum Quadratricum ex altera deſcribatur. Si enim recta Ce. ſurſum ita moueatur continuo ad AB. perpendicularis vt rectis Aa. RZ. SY. TX. interceptis inter latus erectum, & Quadratricem differentialem Ba. æquales ſint CH. DO. EL. KG. ab arcu Quadrantis, deſcribetur Quadratrix Arithmetica HB. Et contra ſi eadem Ce. modo dicto ita moueatur vt rectis CH. DO. EL. KG. æquales ſint Aa. RZ. SY. TX. delineabitur Quadratrix differentialis Ba.

COROL.

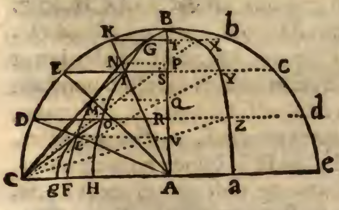
COROLLARIVM III.

D*Enique etiam ex demonſtratis deduci poſſet, tam figuram ABa. latere erecto AB. linea curua BZa. & baſi Aa. contentam eſſe æqualem figuræ HBC. contentæ linea curua HB. arcu Quadrantis BC. & recta CH. quam figuram ABQ. figuræ HBA. eo quod lineæ Aa. RZ. SY. TX. lineis HC. OD. IE. GK. item rectæ ae. Zd. Yc. Xb. rectis HA. OR. IS. GT. æquales ſint; ideoque trapezia ab ijs conſtituta quælibet æqualia ſint, eadem ratione qua prop.* 18. *ſuperioris libri probata eſt, ex polygonis in circulo, atque elipſi analogis, ipſorum circulorum, atque ellipſium analogia, atque æqualitas. Vnde etiam ſequeretur figuram HBa. Quadranti eſſe æqualem. Sed volumus hæc tantum innuiſſe, vt ea, ſi libuerit, demonſtret cui amplius quam nobis otij fuerit.*

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXXI.

BAſis Quadratricis differentialis eſt æqualis exceſſui, quo arcus Quadrantis in quo deſcribitur, ſua ſemidiametro maior eſt.

Sint eadem omnia quæ duabus ſuperioribus propoſi- 30. huius.
tionibus. Dico baſim Aa. ſeu CH. Quadratricis differentialis Ba. eſſe æqualem exceſſui, quo arcus Quadrãtis BC. ſuam ſemidiametrum AB. ſuperat; ſeu rectam Ca. eſſe æqualem arcui Quadrantis BC. Eſt enim vt AC.



ad HC. id eſt ad Aa. illi æqualem, ita AF. ad FC. (vt 30. huius.
paulo poſt oſtendemus) & componendo, & per conuer-
ſionem

Pappus lib. 4. prop. 16. & Clauius p. 4. de Quadratricis. ſionem rationis, eſt aC. ad CA. vt CA. ad AF. ſed vt CA. ſemidiameter Quadrantis ad AF. baſim Quadratricis ita arcus Quadrantis *B*C. ad ſemidiametrum CA. igitur vt aC. ad CA. ita arcus Quadrantis *B*C. ad eandem CA. æ-
9. 5. quales igitur ſunt recta aC. & arcus Quadrantis *B*C. eſt autem Aa. exceſſus quo Ca. id eſt arcus Quadrantis ſuperat ſemidiametrum CA. Quare patet id quod propoſitum eſt.

Quod autem ſit vt AC. ad HC. ita AF. ad FC. ita demonſtratur. Si non ſit eadem ratio AC. ad HC. quæ AF. ad FC. erit vel minor, vel maior. Sit primo minor: ideoque fiat vt AF. ad FC. ita AC. ad quampiam minorem ip-
28. huius. ſa CH. verbi gratia ad DO. (eſt enim maior quolibet ſinu ſequente DO. FI. KG.) erit igitur vt AF. ad FC. ita AC. ad
4. 6. DO. ſed vt AC. ad DO. ita AL. ad LD. (æquiangula e-
15. 1. nim ſunt triangula CAL. ODL. ob angulos æquales ad
29. 1. verticem L. & alternos ad D. A. & O. C. inter parallelas
Corol. 1. DO. CA. ideoque vt CA. ad OD. ita AL. ad DL.) eſt
19. huius. igitur vt AF. ad FC. ita AL. ad LD. ſed AL. maior eſt quam
Corol. 2. AF. & DL. minor quam CF. maior igitur eſt ratio AL. ad
19. huius. LD. quam AF. ad FC. ſed & probata eſt æqualis. Quod eſt abſurdum; Non igitur minor eſt ratio AC. ad HC. quã AF. ad FC. Sed dicatur eſſe maior. erit ergo AF. ad FC. minor ratio, quam AC. ad CH. Fiat igitur vt AC. ad CH. ita recta quæpiam Ag. maior quam AF. ad gC. (ſi enim diuidatur AC. ea proportione quæ eſt AC. ad CH. in g. puncto, cum maior ſit ratio AC. ad CH. quam AF. ad FC. erit maior ratio Ag. ad gC. quam AF. ad FC. cadet igitur punctum g. inter F. & C. ſi enim caderet in ipſum punctum F. eſſet vt AF. ad FC. ita AG. ad GC. quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin: ſi inter puncta F. *A*. eſſet minor ratio *A*g. ad GC. quam *A*F. ad FC. quod etiam eſt abſurdum) & centro *A*. diſtantia *A*g. deſcribatur arcus Lg. ſecans Quadratricem in L. (ſecabit autem, cum continuo
19. huius. Quadratricis radij augeantur in Quadrante, quare ſi non

ſecaret

ſecaret eſſet *Ag* maior ſemidiametro, quod eſt abſurdum, cum ſecta ſit ſemidiameter *A*C. in puncto g.) Quoniam æquales ſunt *A*g. *A*L. item *A*D. *A*C. à centro ad circumferentiam, erit vt *A*g. ad gC. ita *A*L. ad LD. ſed vt *A*g. ad gC. ita *A*C. ad CH. ex hypotheſi, ergo vt *A*L. ad LD. ita *A*C. ad CH. ſed vt *A*L. ad LD. ita *A*C. ad DO. (vt ſuperius probatum eſt, ex ſimilitudiue triangulorum C*A*L. ODL.) ergo vt *A*C. ad CH. ita *A*C. ad DO. æquales igitur ſunt HC. & DO. Quod eſt abſurdum: maior enim eſt HC. id eſt *A*a. quam DO. id eſt quam RZ. Igitur cum *A*C. ad CH. non ſit aut minor, aut maior ratio quam *A*F. ad FC. erit eadem. Ideoque Baſis Quadratricis differentialis &c. Quod probare oportebat.

15. defin.

9. 5.

28. huius.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXXII.

BAſis Quadratricis Arithmeticæ, ſemidiameter Quadrantis in quo deſcribitur, & arcus eiuſdem Quadrantis ſunt in medietate Arithmetica; quorum differentia eſt baſis Quadratricis differentialis.

In eadem figura ſuperioris propoſitionis *B*aſis *A*H. Quadratricis *A*ritmeticæ *B*H. differt à ſemidiametro Quadrantis C*A*. recta HC. quæ æqualis eſt rectæ *A*a. baſi Quadratricis differentialis *B*a. & ſemidiameter Quadrantis C*A*. differt à recta Ca. quæ eſt æqualis arcui Quadrantis *B*C. differentia rectæ Aa. quæ eſt baſis Quadratricis differentialis *B*a. Quare euidenter probatum eſt quod proponebatur.

30. huius.

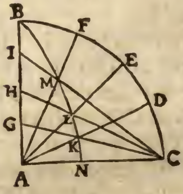
31. huius.

PROBLEMA IV. PROPOS. XXXIII.

QVadratricem quartam, ſeu diuiſiuam deſcribere.

Sit

Sit Quadrans A*B*C. cuius centrum A. latus erectum *AB*. baſis *A*C. circa centrum *A*. immotum moueatur ſurſum ſemidiameter *A*C. ſecans continuo arcum Quadrantis C*B*. & circa punctum C. tanquam cardinem fixum moueatur ſurſum recta C*A*. ita vt continuo ſecet latus erectum *AB*. ea ratione qua *AB*. ſecat arcum Quadrantis, & punctum interſectionis duarum linearum *A*C. C*A*. deſcribat lineam curuam NKLM*B*. Hanc libet Quadratricem quartam, ſeu diuiſiuam ἀντονομασικῶς nuncupare, eo quod non tantum quadrando lineariter circulo, ſed facile præ cæteris diuidendo, accommodata ſit.



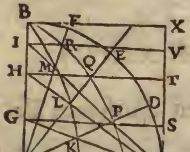
COROLLARIVM

Manifeſtum eſt ex deſcriptione eſſe vt BC. ad CD. ita BA. ad AG. cum in eaſdem rationes BC. & BA. a lineis ſurſum motis AD. & CG. diuidantur.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXXIV.

Radij Quadratricis quartæ a baſi remotiores vicinioribus ſunt maiores.

Sit Quadrans *AB*C. cuius centrum *A*. latus erectum *AB*. baſis *A*C. & in eo quadratrix quarta *B*N. modo & notis ſuperioris propoſitionis deſcripta, cui accedat Quadratrix prima ſeu Geometrica *B*O. cuius baſis *A*O. quas ſecent ſemidiametri *A*D. *A*E. AF. illam in pun-



punctis K. L. M. iſtam in punctis P. Q. R. manifeſtum eſt quod CG. CH. CI. & perpendiculares PG. QH. RI. ex punctis vbi prima Quadratrix ſecatur à ſemidiametris AD. AE. AF. cadent in eadem puncta G. H. I. cum tam lineæ CG. CH. CI. quam perpendiculares PG. QH. RI. diuidant rectam AB. eadem ratione qua diuiſus eſt arcus Quadrantis in punctis D. E. F. perficiatur Quadratum ACXB. circa Quadrantem, & producantur perpendiculares GP. HQ. IR. in S. T. V. puncta lateris erecti Quadrati CX. Dico radium AL. radio AK. eſſe maiorem. Nam cum æquiangula ſint triangula CAK. GPK. ob æquales ad 15. 1.
verticem K. & alternos CAK. GPK. inter parallelas AC. 29. 1.
GP. erit vt CA. ad AK. ita GP. ad PK. & permutando vt 4. 6.
CA. id eſt SG. ad GP. ita AK. ad PK. & conuertendo ſit GP. ad SG. ita PK. ad KA. & componendo vt GP. cum SG. ad SG. ita PA. ad AK. eodem modo oſtendemus eſſe, vt HQ. cum HT. ad HT. ita QA. ad AL. Cum autem ma- 20. huius.
ior ſit GP. quam HQ. maior erit GP. cum SG. quam HQ. 4. pronunc. 8. 5.
cum HT. quæ ipſi SG. eſt æqualis. Igitur maior eſt ratio compoſitæ GP. cum SG. ad SG. quam compoſitæ HQ. cum HT. ad HT. Quare maior eſt ratio PA. ad AK. quam QA. ad AL. minor autem eſt PA. quam QA. igitur minor 19. huius.
eſt AK. quam AL. (nam ſi æquales erant PA. QA. cum PA. maiorem habeat rationem ad AK. quam QA. ad AL. minor eſſet AK. quam AL. multo magis ſequitur PA. exi- 10. 5.
ſtente minore quam QA. ipſam AK. eſſe minorem quam AL.) Atque eodem modo oſtendemus AL. eſſe minorem quam AM. Igitur radij Quadratricis, &c. Quod fuit probandum.

COROLLARIVM. I.

Hinc colligitur baſim quartæ Quadratricis eſſe minimum omnium radiorum.

COROLLARIVM. II.

4. 6. *EX dictis etiam apparet KC. eſſe minorem quam LC. & LC. quod CM. nam vt PA. ad AK. ita GC. ad CK. ſed PA. ad AK. maior eſt ratio quam QA. ad AL. vt in propoſitione oſtenſum eſt; maior ergo ratio eſt GC. ad CK. quam QA.*
4. 6. *ad AL. ſed vt QA. ad AL. ita HC. ad CL. maior igitur eſt ratio GC. ad CK. quam HC. ad CL. minor autem eſt GC. quam*
19. 1. *HC. (ſubtendit enim GC. angulum acutum GHC. & HC. angulum obtuſum HGC. in triangulo HGC.) Igitur ob rationem allatam in fine propoſitionis KC. minor eſt quam LC.*

COROLLARIVM III.

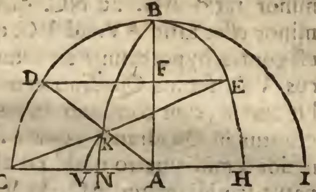
DEnique ſequitur manifeſtè, complementa ſemidiametri inter Quadratricem diuiſiuam & Quadrantem, videlicet NC. KD. LE. MF. ordine decreſcere ita vt maxima ſit NC. ea minor KD. & ipſa KD. minor LE. & ſic deinceps, ſi enim ex æqualibus AC. AD. AE. AF. demantur inæquales, ex prioribus minores AN. AK. AL. AM. vt patet ex
5. pron. *propoſitione, remanent inæquales NC. KD. LE. MF. prima maior quam ſecunda, ſecunda quam tertia; atque ita in reliquis.*

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXV.

BAſis Quadratricis diuiſiuæ diuidit ſemidiametrum Quadrantis in quo deſcribitur, in ratione ſemidiametri ad arcum Quadrantis.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum A. latus erectum AB. baſis AC. & in eo Quadratrix diuiſiua ſeu quarta BN.

BN. cuius baſis NA. Dico quod baſis NA. diuidit ſemidiametrum AC. in ratione Semidiametri AC. ad arcum Quadrantis BC. ſeu eſſe vt AC. ad CB. ita NA. ad NC. Continuetur Quadrans CB. in I. & ſit CBI. ſemicirculus, & ABI. Quadrans in quo Quadratrix differentialis ſeu ſecunda BEH. cuius baſis AH. & in priori Quadrante ſit prima Quadratrix BO. Erit vt HC. ad CA. ita CN. ad NA. vt mox probabimus, ſed HC. eſt æqualis arcui Quadrantis BC. (Nam cum AH. ſit exceſſus quo arcus BC



ſuperat ſemidiametrum AC. erit tota HC. æqualis arcui BC.) ergo vt arcus Quadrantis BC. ad ſemidiametrum AC. ita CN. ad NA Quod vero ſit vt HC. ad AC. ita NC. ad AN. ita probatur. Si enim contrarium aſſeratur, maior erit, aut minor proportio HC. ad AC. quam NC. ad NA. Sit primum maior. Quoniam maior eſt proportio HC. ad CA. quam NC. ad NA. erit conuertendo minor ratio CH. ad HC. quam NA. ad NC. quare erit eadem ad minorem aliquam ipſa CH. verbi gratia ad DE. parallelam baſi AC. & interceptam inter arcum Quadrantis, & lineam quadratricis differentialis, quæ minor eſt quam CH. (nam DF. ſinus arcus DB. eſt minor ſinu toto AC. eſt FE. minor quam AH. ideoque tota DE. tota CH. minor eſt) ductiſque AD. CE. rectis eę tranſibunt per idem punctum huius Quadratricis K. vt patet ex deſcriptione harum linearum 28. & 34. huius atque adeo ſit vt AC. ad DE. ita NA. ad NC. Sed vt CA. ad DE. ita AK. ad KD. (ob ſimilitudinem triangulorum CAK. HDK.) ergo vt AN. ad NC. ita AK. ad KD. Sed AK. maior eſt quam AN. & KD. minor quam NC. ergo maior eſt ratio AK. ad KD. quam AN. ad NC. ſed eſt etiam eadem. Quod eſt abſurdum.

32. huius.
Corol. 29. huius.
Corol. 1. 35 huius.
Corol. 3. 35 huius.

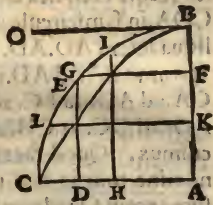
Sed dicatur ratio HC. ad CA. minor ratione CN. ad NA. erit igitur minor ratio NA. ad CN. quam CA. ad HC. fiatque vt CA. ad HC. ita AV. ad VC. erit AV. maior quam AN. (ſit enim eſſet æqualis remaneret minor ratio AN. ad NC. quam CA. ad HC, ſi minor, minor eſſet ratio AV. ad VC. quam AN. ad NC. ſed ponitur etiam minor ratio AN. ad NC. quam CA. ad HC. igitur minor eſſet ratio AV. ad VC. quam CA. ad HC. quod eſt contra hypotheſin) ex diſtantia AV. deſcribatur arcus VK. ſecans Quadratricem diuiſiuam in K. (ſecabit autem, cum continuo huius quadratricis radij augeantur in Quadrante, quare ſi non ſecaret eſſet AV.
35. huius. maior ſemidiametro quod eſt abſurdum cum ſecta ponatur ſemidiameter AC. in V. puncto ea ratione, quæ eſt CA. ad HC.) Quoniam æquales ſunt AV. AK. item AC. AD. à centro ad ſuas circonferentias erit vt AV. ad VC. ita AK. ad KD. ſed vt AV. ad VC. ita ex hypotheſi CA. ad CH. ergo vt AK. ad KD. ita CA. ad CH. ſed eſt etiã vt AK. ad KD. ita CA. ad DE. (ob ſimilitudinem triangulorum CAK. EDK.) eſt ergo vt CA. ad CH. ita
9. 5. CA. ad DE. æquales igitur ſunt CH. DE. Quod eſt abſurdum, maior enim eſt DE. ſinus totus ſinu partiali DF.
Corol. 29. huius. & AH. baſis Quadratricis ſinu FE. igitur tota CH. tota DE. maior eſt. Non igitur ratio HC. ad CE. minor eſt ratione CN. ad NA. ſed nec maior, igitur æqualis ergo baſis Quadratricis diuiſiuæ &c. Quod erat &c.

PROBLEMA V. PROPOS. XXXVI.

HActenus nonnullas lineas protulimus, quæ ſua potiſſimum baſi, tetragoniſmo; ipſa vero periocha, diuiſioni circuli operam ſuam conferunt. Ad vltimum autem hoc munus multas alias excogitauimus; quarum tamen

men vnam tantum, aut alteram proferemus, ad quarum imitationem, atque exemplum aliæ innumeræ poterunt conformari.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum A. baſis AC. latus erectum AB. tangens eiuſdem in puncto B. quælibet recta BO. moueatur latus erectum AB. ex A. verſus C. ita vt ſit continuo baſi AC. perpendicularis; moueatur item tangens BO. deorſum verſus A. ita vt ſit in toto motu lateri erecto AB. perpendicularis: & qua ratione AB. ſecat AC. eadem BO. ſecet arcum Quadrantis BC. nempe cum AB. peruenerit in DE. tangens BO. peruenerit in FG. ſitque vt CA. ad AD. ita CB. ad BG. atque ita deinceps, cum AC. fuerit in HI. ſit BO. in KL. ſitque vt CA. ad AH. ita CB. ad BL. ſecent autem ſeſe dictæ rectæ in puncto, quod in toto motu ſui veſtigium relinquat (verbi gratia in B. M. N. C.) deſcribetur linea curua BMNC.

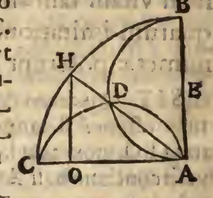


PROBLEMA VI. PROPOS. XXXVII.

QVadrantem ita ſecare vt ducta perpendicularis ad baſim arcum Quadrantis, & baſim alternatim in eandem rationem diuidat.

SIT Quadrans ABC. cuius centrum A. latus erectum AB. baſis AC. ſpiralis Quadrantis ADB. quam ſecet in D. ſemicirculus CDA. centro E. (quod baſim AC. bifariam diuidit) deſcriptus, & ducantur recta CD. & ADH. in peripheria Quadrantis H. tandemque ex H. recta HO.

per-



perpendicularis ad baſim CA. Dico eſſe vt CH. ad HB. ita AO. ad OC. Eſt enim, ex difinitione ſpiralis, vt BA. ad AD. ita BC. ad CH. ipſi autem AD. eſt æqualis AO. (Nam triangula HOA. CDA. habentia angulum communem ad A. & æquales rectos HOA. ex deſcriptione, &
26. 1. CDA. in ſemicirculo; & baſes AC. AH. æquales, etiam reliqua letera AO. AD. item HO. CD. æqualia habent.)
7. 5. Igitur vt BA. ad AD. ita BA. id eſt CA. ad AO. ideoque vt CA. ad AO. ita BC. ad CH. & diuidendo & conuertendo AO. ad OC. vt CH. ad HB. Igitur Quadrantem ita ſecuimus. Quod facere oportebat. Quadrantis autem nomine tum in hoc tum in ſequentibus problematis ipſum arcum Quadrantis nuncupabimus, ne eum cum arcu partiali confundamus.

COROLLARIVM.

Hinc efficitur poſſe ſecari Quadrantem ducta perpendiculari ad baſim, ita vt quæ ratio Quadrantis, ad arcum ea ſit ſinus totius ad ſinum rectum complementi; & ſinus totius ad ſinum verſum complementi, & quæ ratio ſinus recti ad ſinum verſum ea ſit arcus reſpondentis ſinui verſo ad arcum reſpondentem ſinui recto: Eſt enim in vltima figura vt arcus Quadrantis CB. ad arcum HC. ita ſinus totus AC. ad ſinum complementi OA. & vt arcus Quadrantis CB. ad arcum HB. ita ſinus totus AC. ad ſinum verſum complementi CO. denique CH. arcus ad arcum HB. eſt vt ſinus rectus AO. ad ſinum verſum OC. Ex quibus etiam ſequitur poſſe dicta perpendiculari ſecari Quadrantem, ita vt ſint eius partes in ea ratione alternatim in qua ſunt variæ lineæ, quæ habent eandem proportionem, quam aut ſinus totus ad ſinum rectum, aut idem ad ſinum

verſum,

verſum, aut ſinus rectus ad ſinum verſum: Cuiuſmodi quamplurima occurrunt apud eos qui de ſinibus, tangentibus, ſecantibus, ac chordis ſcripſerunt, ad quos lectorem remittimus.

PROBLEMA VII. PROPOS. XXXVIII.

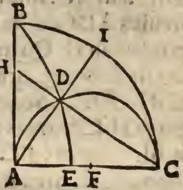
QVadrantem ita diuidere, vt quæ proportio Quadrantis ad arcum, eadem ſit ſinus arcus ad ſinum complementi.

Deſcribatur intra Quadrantem ABC. quadratrix diuiſiua ſeu quarta BDE. & diuiſa baſi quadrantis bifariam in F. centro F. ſemidiametro FC. deſcribatur ſemicirculus CDA. ſecans quartam Quadratricem in D. per quod tranſeat ſemidiameter ADI. occurrens Quadrāti in I. & recta CDH. occurens lateri erecto in H. Cum angulus CDA. in ſemicirculo ſit rectus erit CD. ſinus rectus arcus CI. & DA. ſinus rectus complementi, ſeu arcus IB. Dico eſſe Quadrantem BC. ad arcum IC. vt eſt ſinus rectus CD. arcus IC. ad DA. ſinum complementi, ſeu arcus IB. Quoniam BDE. eſt Quadratrix diuiſiua erit vt BC. ad CI. ita BA. id eſt CA. ad AH. id eſt CD. ad DA. Ergo Quadrantem ita diuiſimus &c. Quod erat faciendum.

33. huius.

31. 3.

33. huius.
8. 6.



COROLLARIVM.

EX hoc Problemate colligitur poſſe diuidi Quadrantem ea ratione quam habent variæ quantitates eandem cum ratione ſinus recti & ſinus complementi, ac inter cæteras

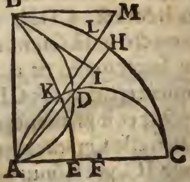
ras ea, vt ſit eadem proportio Quadrantis ad arcum qua ſinus totius ad tangentem complementi.

8. 6. *Eſt enim vt CD. ad DA. id eſt vt BC. ad CI. ita CA. ſinus totus ad AH. tangentem anguli ACH. qui eſt complementum anguli DAC. ſcilicet arcus IC.*

PROBLEMA VIII. PROPOS. XXXIX.

QVadrantem ita ſecare vt duorum arcuum, quæ ratio prioris ad poſteriorem eadem ſit ſinus complementi prioris ad tangentem complementi poſterioris.

1. defin. huius. 33. huius. SIT Quadrans ſæpe dictus intra quem deſcriptæ ſint duæ lineæ BDA. ſpiralis & BKE quarta Quadratrix; & diuiſa baſi AC. bifariam in F. deſcribatur centro F. ſemicirculus ADC. diſtantia FC. ſecans ſpiralem in D. Quadratricem quartam in K. & ducantur ſemidiametri ADH. AKL. Secantes Quadrantem in H. L. & arcus BH. ſinus rectus ſit BI. & arcus BL. tangens BM. Dico eſſe vt arcum HC. ad arcum LC. ita BI. ſinum complementi HC. ad BM. tangentem complementi arcus BL. Cum enim ſit vt BC. ad HC. ita AB. ad BI. vt patet ex progreſſu 37. huius erit conuertendo vt HC. ad BC. ita BI. ad AB. eſt autem vt BC. ad CL. ita AB. ad BM. igitur ex æqualitate erit vt HC. ad CL. ita BI. ad BM. Quare quadrantem ita ſecuimus &c. Quod facere oportebat.

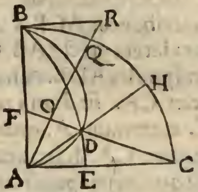


37. huius. Coroll. 38. huius.

PROBLEMA X. PROPOS. XL.

QVadrantem ita ſecare vt quæ ratio Quadrantis ad complementum dupli arcus, eadem ſit ſinus totius ad tangentem arcus.

Sint vt in ſuperiori, in Quadrante ABC. deſcriptæ Helix, & Quadratrix quarta ſecantes ſe in D. puncto per quod ex punctis C. D. tranſeant duæ rectæ ADH. CDF. quarum illa quadrantem ſecet in H. hac latus erectum in F. & diuidatur arcus BH. bifariam in Q. ſitque arcus BQ. tangens BR. & connectatur AR. ſecans FD. in O. Dico Quadrantem BC. ita ſectum eſſe in Q. vt quæ ratio Quadrantis BC. ad complementum HC. dupli BQ. eadem ſit ſinus totius AB. ad tangentem BR. Quoniam ADH. recta tranſit per punctum D. exiſtens in linea ſpirali erit vt BC. ad CH. ita BA. ad AD. Rurſus quia recta CDF. tranſit per punctum D. quartæ Quadratricis erit vt BC. ad CH. ita BA. ad AF. æquales igitur ſunt AD. AF. Quare cum in triangulis FAO. DAO. latera FA. AO. lateribus DA. AO. & anguli FAO. DAO. ſint æquales (ſumpſimus enim arcus BQ. QH. æquales) erunt anguli FOA. DOA. æquales, ideoque recti. Quare cum in triangulo rectangulo CAF. ex A. angulo recto in baſim FC. perpendicularis AO. ducta ſit erit angulus FCA. æqualis angulo FAO. Igitur cum in triangulis rectangulis CAF. ABR. æquales ſint anguli recti ad A. & B. & æquales anguli FCA. BAR. æquales item AC. AB.



1. defin. huius.
33. huius.
9. 5.
4. 1.
8. 6.

32. & 26. 1. æquiangula, & æqualia erunt dicta triangula, vt ergo CA. id eſt BA. ad AF. ita AB. ad BR. ſed vt BA. ad AF. ita oſtenſus eſt Quadrans BC. ad arcum HC. Vt igitur AB. ad BR. ita BC. ad HC. Quare Quadrantem ita ſecuimus &c. Quod faciendum fuerat.

PROBLEMA IX. PROPOS. XLI.

Ex Quadrante duos arcus inæquales auferre ita vt quæ proportio maioris arcus ad minorem, ea ſit ſinus recti minoris ad ſinum complementi maioris.

Super eadem baſi AC. centris A. C. duo Quadrantes deſcribantur ACB. CAE. æquales ſecantes ſe in K. quorum latera erecta AB. CE. ac ſit latus erectum AB. diameter ſpiralis ADB. cuius principium A. extremum B. baſis vero CA. ſit diameter alterius ſpiralis cuius principium C. extremum A. quæ ſpirales ſeſe in puncto D. ſecent, & circa CA. deſcriptus ſit ſemicirculus CGHA. Ducantur autem per punctum D. ſemidiametri AF. AM. illa ſecans ſemicirculum in G. Quadrantem BC. in F. iſta ſecans ſemicirculum in H. Quadrantem EA. in M. & ducta AH. ſecet Quadrantem BC. in H. manifeſtum eſt cum angulus in ſemicirculo CGA. ſit rectus CG. eſſe ſinum rectum arcus FC. & ob eandem cauſam CH. eſſe ſinum rectum arcus KC. & HA. ſinum complementi. Dico eſſe arcum maiorem KC. ad minorem FC.



defin. 1. huius. vt eſt ſinus rectus CG. minoris arcus ad HA. ſinum complementi maioris arcus KC. Nam ex natura ſpiralis, cum punctum D. ſit in ſpirali ADB. erit vt AD. ad AF. id eſt

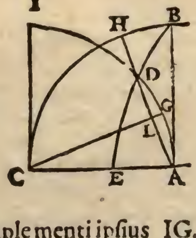
AD.

AD. ad AC. ita arcus FC. ad Quadrantem CB. id eſt arcus GC. ad ſemicirculum CGA. Rurſus cum idem punctum D. ſit in voluta ADC. erit vt AC. ad CD. ita Quadrans EA. ad arcum EM. ſemicirculus CHA. ad arcum CGH. ergo ex æquali vt AD. ad D. ita arcus CG. ad arcum CH. id eſt arcus FC. ad arcum KC. & conuertendo At vero æquiangula ſunt triangula CGD. AHD. ob angulos rectos ad G. H. & æquales ad verticem D. igitur vt CD. ad DA. ita CG. ad HA. ſed vt CD. ad DA. ita KC. ad FC. ergo eſt KG. ad FC. vt CG. ad HA. ergo ex Quadrante &c. Quod erat faciendum.

PROBLEMA XI. PROPOS. XLII.

QVadrantem ita ſecare, vt quæ proportio Quadrantis ad arcum, ea ſit ſinus totius ad tangentem dupli arcus complementi.

Sit Quadrans ABC. cuius centrum A. baſis AC. latus AB. & quarta Quadratrix in eo deſcripta BDE. centro autem C. diſtantia CA. deſcribatur alius Quadrans CAI. ſecans quartam Quadratricem in D. & ducantur rectæ ADH. ſecans Quadrantem CB. in H. & CDF. ſecans latus BA. in F. & diuidatur DA. bifariam in L. ducaturque CLG. ſecans arcum DA. bifariam in G. erit AF. tangens arcus AD. Dico eſſe vt Quadrantem AI. ad arcum IG. ita ſinum totum BA. ad tangentem arcus BA. qui duplus eſt arcus GA. complementi ipſius IG. Rurſus enim vt in ſuperiori probabimus arcum DA. eſſe



duplum ipſius HB. ideoque GA. dimidium eſſe æqualem ipſi HB. & reliquos arcus HC. GI. eſſe æquales: vt ergo
33. huius. BC. ad CH. ita IA. ad IG. vt autem BC. ad CH. ita BA. ad AF. ex deſcriptione quartæ Quadratricis, Quare vt IA. Quadrans ad arcum IG. ita BA. ſinus totus, ad tangengentem BA. Ergo Quadrantem ita ſecuimus &c. Quod erat faciendum.

FINIS.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

P A T A V I I,
Apud Variſcum Variſci ad Puteum Pictum. 1629.

Superiorum permiſſu.